Sesiunea I, iulie 2014

Se consideră polinomul $P = X^4 - 4X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

1 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ este: [A] 2 [B] -4 [C] 4 [D] c [E] $-3+a+b+c$

2 $P(0)$ este: [A] a [B] 0 [C] $2c$ [D] c [E] b

3 Pentru $a = 6$, numărul perechilor $(b,c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pentru care x_1, x_2, x_3, x_4 sunt întregi, este:
[A] 2 [B] 1 [C] 4 [D] 8 [E] 16

4 Pentru $c = 1$ perechea $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 sunt reale și pozitive este: [A] $(-6,4)$ [B] $(6,4)$ [C] $(6,-4)$ [D] $(-6,-4)$ [E] $(0,0)$

Se consideră funcțiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5 Soluțiile ecuației $f_1(x) = 0$ sunt:
[A] $x_1 = x_2 = -1$ [B] $x_1 = 1,\ x_2 = -1$ [C] $x_1 = 0,\ x_2 = -1$ [D] $x_1 = x_2 = 1$
[E] $x_1 = x_2 = 0$

6 Vârfurile parabolelor asociate funcțiilor f_m se găsesc pe:
[A] dreapta $y = -x$ [B] dreapta $y = x$ [C] parabola $y = x^2$ [D] dreapta $y = x + 1$
[E] parabola $y = -x^2$

7 $f_m(0)$ este: [A] $4m-3$ [B] $1-m$ [C] $m-1$ [D] 0 [E] 1

Se considera matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Notăm cu A^T transpusa matricei A.

8 $\det A$ este: [A] 1 [B] -1 [C] 0 [D] 2 [E] -2

9 Perechea $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care $A^2 = aA + bI_2$ este:
[A] $(-2,1)$ [B] $(2,1)$ [C] $(2,-1)$ [D] $(0,0)$ [E] $(-2,-1)$

10 A^{10} este: [A] $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$ [B] $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$ [C] $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -20 & 1 \end{pmatrix}$
[D] $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 20 & -1 \end{pmatrix}$ [E] $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$

11 Numărul soluțiilor ecuației matriceale $X^4 + X^2 = A^2 + A^T$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, este:
[A] 1 [B] 0 [C] 2 [D] ∞ [E] 4

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x)=\frac{[x]}{1+\{x\}}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x, iar $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

12 $f(0)$ este: $\boxed{A}$ 1 $\boxed{B}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{C}$ 2 $\boxed{D}$ $\frac{1}{3}$ $\boxed{E}$ 0

13 Mulțimea soluțiilor ecuației $f(x)=1$ este: $\boxed{A}$ $[0,1]$ $\boxed{B}$ $\emptyset$ $\boxed{C}$ $\{1\}$ $\boxed{D}$ $(0,1]$ $\boxed{E}$ $[1,2)$

14 Mulțimea soluțiilor ecuației $f(x)=x$ este: $\boxed{A}$ $\{0,1,2\}$ $\boxed{B}$ $\mathbb{N}$ $\boxed{C}$ $\mathbb{Q}$ $\boxed{D}$ $\mathbb{Z}$ $\boxed{E}$ $\{-1,0,1\}$

15 $f(\mathbb{R})$ este: $\boxed{A}$ $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup\{0\}\cup(\frac{1}{2},\infty)$ $\boxed{B}$ $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\boxed{C}$ $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ $\boxed{D}$ $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ $\boxed{E}$ $(0,\frac{1}{2}]$

Pe intervalul $(0,\infty)$ se consideră legea de compoziție $x*y=x^{\log_a y}$, unde $a>0, a\neq 1$ este fixat.

16 $1*1$ este: $\boxed{A}$ $\log_a 2$ $\boxed{B}$ 2 $\boxed{C}$ 1 $\boxed{D}$ 2^2 $\boxed{E}$ $\frac{1}{2}$

17 Elementul neutru în raport cu legea " $*$ " este: $\boxed{A}$ $\frac{1}{a}$ $\boxed{B}$ 1 $\boxed{C}$ e $\boxed{D}$ a $\boxed{E}$ $a^{\frac{1}{a}}$

18 Simetricul elementului $x\neq 1$ față de legea " $*$ " este $\boxed{A}$ x^a $\boxed{B}$ $\frac{1}{x}$ $\boxed{C}$ $\log_a x$ $\boxed{D}$ a^x $\boxed{E}$ $a^{\log_x a}$

19 Mulțimea valorilor lui a pentru care intervalul $(0,1)$ este parte stabilă la legea " $*$ " este: $\boxed{A}$ $(1,e)$ $\boxed{B}$ $\emptyset$ $\boxed{C}$ $(1,\infty)$ $\boxed{D}$ $(0,1)$ $\boxed{E}$ $\{e\}$

Să se calculeze limitele:

20 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}$ $\boxed{A}$ 2 $\boxed{B}$ 1 $\boxed{C}$ 0 $\boxed{D}$ ∞ $\boxed{E}$ e

21 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\operatorname{arctg}\frac{k+1}{n^2}$ $\boxed{A}$ ∞ $\boxed{B}$ 1 $\boxed{C}$ 0 $\boxed{D}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{E}$ $\frac{\pi}{2}$

22 $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sin\frac{1}{n+2}-2\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n}\right)$ $\boxed{A}$ 2 $\boxed{B}$ 0 $\boxed{C}$ ∞ $\boxed{D}$ $\sin 1$ $\boxed{E}$ 1

Să se calculeze:

23 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^2 \frac{x^n}{x^n+1}\mathrm{d}x$ [A] $\ln 2$ [B] 0 [C] ∞ [D] 2 [E] 1

24 $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}\cos \pi x \mathrm{d}x$ [A] 0 [B] 2 [C] π [D] 2π [E] $-\pi$

25 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ [A] π [B] $\frac{\pi}{4}$ [C] $\frac{\pi}{3}$ [D] $\frac{\pi}{2}$ [E] $\frac{\pi}{6}$

26 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ [A] $\frac{1}{3}$ [B] 2 [C] $\frac{1}{4}$ [D] 0 [E] 3

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$.

27 $f(1)$ este: [A] $\frac{1}{e}$ [B] $1-e$ [C] ∞ [D] $-\infty$ [E] $\frac{1}{1-e}$

28 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ este: [A] $-\infty$ [B] 1 [C] ∞ [D] 0 [E] e

29 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ este: [A] 0 [B] ∞ [C] $-\infty$ [D] e [E] 1

30 Ecuația asimptotei oblice a lui f este:
[A] $y=-x$ [B] $y=-x+\frac{1}{2}$ [C] $y=-x+1$ [D] $y=x+1$ [E] $y=ex$

Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{6}{x^2-9}$.

31 $f(0)$ este: [A] $-\frac{2}{3}$ [B] 1 [C] 0 [D] -2 [E] -3

32 $f'(0)$ este: [A] -1 [B] 1 [C] 0 [D] $\frac{1}{3}$ [E] 6

33 Numărul de puncte de extrem local ale lui f este: [A] 0 [B] 1 [C] 2 [D] 3 [E] 4

34 Numărul soluțiilor reale ale ecuației $f'''(x)=0$ este: [A] 4 [B] 0 [C] 2 [D] 3 [E] 1

Fie $f:[0,1]\to[0,1],\ f(x)=xe^{x^2-1}$.

35 $f(0)$ este: [A] 0 [B] 1 [C] e [D] e^{-1} [E] $2e$

36 $f(1)$ este: [A] 0 [B] 1 [C] e [D] e^{-1} [E] $2e$

37 Aria cuprinsă între graficele funcțiilor f și f^{-1} (inversa lui f) este:
[A] 2 [B] e [C] $2e$ [D] $\frac{1}{e}$ [E] 1

Funcția continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifică egalitatea $xf(x) = e^x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

38 $f(0)$ este: [A] e [B] 0 [C] 1 [D] -1 [E] $e-1$

Se dau punctele $A(\lambda, 2)$, $B(4,6)$, $C(6,-2)$.

39 Valoarea lui λ pentru care punctele A, B, C sunt coliniare este: [A] 3 [B] $\frac{5}{2}$ [C] 0 [D] -5 [E] 5

Se consideră ecuația $2a\sin^2 x - 2\sin x\cos x = a - \sqrt{3}$, $a \in \mathbb{R}$.

40 Mulțimea valorilor lui a pentru care ecuația are soluția $x = 0$, este: [A] $\{-\sqrt{3}\}$ [B] $\{\sqrt{3}\}$ [C] $\{0, \sqrt{3}\}$ [D] $\emptyset$ [E] $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

Fie $z = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i)$. Valoarea lui z^{2014} este:

41 [A] $\frac{1}{2^{2014}}$ [B] $\frac{1-i\sqrt{3}}{2^{2014}}$ [C] $\frac{1+i\sqrt{3}}{2^{2014}}$ [D] $\frac{1-i\sqrt{3}}{2^{2015}}$ [E] $-\frac{1}{2^{2014}}$

Fie punctele $A(2,1)$, $B(-1,-3)$.

42 Distanța dintre punctele A și B este: [A] 6 [B] $\frac{5}{2}$ [C] 4 [D] $\frac{3}{2}$ [E] 5

43 Coordonatele simetricului punctului A față de B sunt: [A] $(4,7)$ [B] $(-4,-7)$ [C] $(-7,-4)$ [D] $(1,-2)$ [E] $(7,4)$

În triunghiul ABC avem $BC = 6$, $m(\widehat{A}) = \frac{\pi}{3}$, $m(\widehat{B}) = \frac{\pi}{4}$.

44 Latura AC are lungimea: [A] $3\frac{\sqrt{3}}{2}$ [B] $\sqrt{6}$ [C] $5\sqrt{6}$ [D] $2\sqrt{6}$ [E] $\sqrt{\frac{3}{2}}$

Dacă $\sin x + \cos x = 1$ atunci $\sin 2x$ este:

45 [A] 1 [B] 0 [C] $\frac{1}{2}$ [D] $\frac{\sqrt{3}}{2}$ [E] -1