

Simularea sistemelor de corpuri rigide si rezultate conexe

Teză de abilitare

Bogdan Gavrea

Rezumat

În teza de abilitare am descris activitatea de cercetare desfășurată după obținerea titlului de Doctor in Matematică de la University of Maryland, Baltimore County, SUA, în anul 2006. Rezultatele științifice descrise în prezenta lucrare sunt legate de simularea sistemelor de corpuri rigide si de inegalități matematice cu aplicații în probabilități și statistică.

Teza este compusă din trei capitole. În primul capitol este prezentată terminologia precum și rezultate auxiliare referitoare la simularea sistemelor de corpuri rigide supuse unor constrângeri bilaterale, de contact și frecare de tip Coulomb. În lipsa constrângerilor de contact și frecare modelul matematic este dat de un sistem de ecuații diferențiale algebrice (DAE-”*differential algebraic equations*”). DAE-ul corespunzător sistemelor de corpuri rigide este un DAE având indexul 3. Schemele numerice folosite aici pentru integrarea mișcării corpurilor rigide folosesc un DAE echivalent cu index 2.

În cazul în care sunt luate în considerare și contacte cu frecare de tip Coulomb modelul este completat cu constrângeri unilaterale și de complementaritate, conducând astfel la probleme diferențiale de complementaritate (DCP-”*differential complementarity problems*”). Un exemplu simplu, descoperit de P. Painlevé în 1895, arată însă că, chiar și în absența coliziunilor formularea clasică dată de DCP nu este compatibilă cu legea de frecare a lui Coulomb. Așadar, DCP-ul este înlocuit de *incluziuni diferențiale în măsură* (MDI-”*measure differential inclusions*”). Unul din elementele esențiale ale MDI-ului ce caracterizează sistemele de corpuri rigide este conul de frecare.

Schemele de integrare numerică descrise aici definesc pasul de integrare sub forma unei *probleme mixte de complementaritate liniară* (MLCP-”*mixed linear complementarity problems*”). MLCP-ul constă într-o *problemă de complementaritate liniară* (LCP-”*linear complementarity problem*”) împreună cu un sistem liniar de ecuații. Când modelul include frecare de tip Coulomb matricea LCP-ului ce definește pasul de integrare este copozitivă.

În cel de-al doilea capitol al acestei teze sunt prezentate principalele contribuții. Capitolul debutează cu contribuții legate de simularea sistemelor de corpuri rigide

și se sfârșește cu descrierea unor rezultate auxiliare date de inegalități matematice cu aplicații în probabilități și statistică. Schemele numerice din [6] sunt prezentate în prima parte. Aceste scheme rezolvă la fiecare pas de integrare o problemă mixtă de complementaritate liniară (MLCP). Pentru a obține acest MLCP conul de frecare este înlocuit de o aproximare poliedrală.

Este analizată problema convergenței acestor scheme numerice în contextul incluziunilor diferențiale în măsură. O ipoteză esențială în obținerea rezultatelor de convergență constă în garantarea unui con de frecare punctat uniform (*"uniform pointedness of the friction cone"*). Analiza de convergență dată în [6] introduce două noi concepte: cel de *con de frecare redus* (*"reduced friction cone"*) și de *incluziune diferențială redusă* (*"reduced measure differential inclusion"*).

Capitolul se continuă prin descrierea rezultatelor din [8] unde un model bazat pe o problemă de optimizare pătratică (QP-*"quadratic program"*) a fost analizat din punct de vedere computațional, atunci când acesta a fost folosit în simularea fluxului granular dintr-un reactor. Pasul de integrare este definit sub forma unei probleme de optimizare pătratice (QP), această problemă fiind obținută în urma unei relaxări convexe. Atât problema primală cât și cea duală sunt analizate. Din nou garantarea unui con de frecare punctat este o ipoteză esențială în obținerea rezultatelor dorite.

În partea următoare a capitolului sunt prezentate rezultatele obținute în [2], [1] și [3]. În aceste lucrări au fost considerate sisteme de corpuri rigide în *regim cvasi-static* (*"quasi-static setting"*). Aplicația descrisă în [2] și [1] este cunoscută ca *"the peg in the hole problem"* și este caracterizată prin dimensiuni de ordinul milimetrilor (*"meso-scale problems"*). Aplicația constă în a deplasa prin împingere un corp rigid de dimensiuni reduse dintr-o poziție inițială A într-o poziție finală B . Modelul cvasi-static folosit este argumentat prin faptul că forțele de inerție sunt cu un ordin mai mic decât cele de frecare. În problema considerată există incertitudini datorate percepției senzoriale, modelului matematic și a estimării unor parametrii, cum ar fi spre exemplu coeficientul de frecare. Având în vedere că astfel de incertitudini joacă un rol foarte important determinarea unor strategii de control robuste devine o prioritate. În [2] și [1] diverse strategii robuste de control au fost determinate folosind mai mult considerații de ordin geometric. Aici am arătat că parametrii robusți de control pot fi determinați ținând cont de structura LCP-ului ce caracterizează pasul de integrare. Mai precis, matricile de complementaritate corespunzătoare soluțiilor LCP-urilor ce descriu pașii de integrare sunt folosite în clasificarea parametrilor de control.

O problemă de optimizare folosită în estimarea fluxului optic este analizată în continuare. Problema de minimizare în norma l_1 a fost descrisă amănunțit în [7]. Aceasta a fost obținută din versiunea discretă a modelului de estimare Horn-Schunck, în care varianta clasică dată de norma l_2 este înlocuită de funcționala corespunzând normei l_1 . Pentru problema de minimizare în norma l_1 două pro-

grame liniare (LP-”linear program”) sunt analizate în [7]. Aici am prezentat pe scurt analiza pentru LP-ul cu o structură superioară din punct de vedere al performanței computaționale, structura acestei probleme de minimizare putând fi exploatată cu ușurință prin utilizarea unor algoritmi de calcul paralel.

Ultima parte a celui de-al doilea capitol este legată de unele inegalități matematice cu aplicații în probabilități și statistică. Lucrarea [4] prezentată pe scurt aici prezintă o inegalitate de tipul Chebysev–Grüss. Rezultatele din această lucrare folosesc modulul de continuitate și cel mai mic majorant concav al acestuia pentru două funcționale liniare și pozitive ce conservă constantele. Rezultatele din [4] pot fi folosite pentru estimarea covarianței pentru diverse perechi de variabile aleatoare. Câteva noi inegalități de tipul Hermite-Hadamard au fost obținute în [5]. Aici am prezentat o astfel de inegalitate care poate folosită în estimarea momentelor unei variabile aleatoare continue.

În ultimul capitol am descris principalele linii de cercetare ce caracterizează activitatea curentă și viitoare. O parte din acestea sunt date în lista de mai jos.

- Dezvoltarea și implementarea de scheme numerice bazate pe probleme liniare de complementaritate (LCP) pentru navigarea autonomă. O modalitate de a introduce LCP-uri în integrarea numerică a sistemelor autonome este prin a defini ”*interacțiuni virtuale*”.
- Dezvoltarea unor algoritmi cu caracter aleator folosiți în rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații neliniare.
- Obținerea de rezultate teoretice și de natură computațională pentru o clasă de probleme de optimizare stocastică. Această clasă de probleme pe care o vom numi pe scurt SOESC (*”Stochastic Optimization problems with mixed Expectation and per-Scenario Constraints”*) este supusă atât unor constrângeri punctuale (*”per-scenario”*) cât și unor constrângeri în medie. Din punct de vedere teoretic suntem interesați de convergența unor aproximații ale problemei infinit dimensionale, iar din punct de vedere computațional interesul nostru constă în dezvoltarea unor algoritmi de calcul paralel pentru rezolvarea aproximațiilor finit dimensionale. Algoritmii de calcul paralel vizați vor exploata structura particulară a sistemelor liniare rezultate în urma folosirii unor metode de punct interior.
- Dezvoltarea unor noi scheme de integrare numerică pentru DAE-uri de index 2 și 3.
- Obținerea unor rezultate de convergență în contextul incluziunilor diferențiale în măsură pentru sistemele cu coliziuni parțial elastice.

Referințe

- [1] D.J. Cappelleri, Peng Cheng, J. Fink, B. Gavrea, and V. Kumar. Automated assembly for mesoscale parts. *Automation Science and Engineering, IEEE Transactions on*, 8(3):598–613, 2011.
- [2] Peng Cheng, D. J. Cappelleri, B. Gavrea, and V. Kumar. Planning and control of meso-scale manipulation tasks with uncertainties. In *Robotics: Science and Systems III, June 27-30, 2007, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, USA*, 2007.
- [3] B. Gavrea. Rigid body time-stepping schemes in a quasi-static setting. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 56(2):1–11, 2011.
- [4] B. Gavrea. Improvement of some inequalities of Chebysev-Grüss type. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(6):2003 – 2010, 2012.
- [5] B. Gavrea. A Hermite-Hadamard type inequality with applications to the estimation of moments of continuous random variables. *Applied Mathematics and Computation*, 254:92 – 98, 2015.
- [6] B. Gavrea, M. Anitescu, and F. Potra. Convergence of a class of semi-implicit time-stepping schemes for nonsmooth rigid multibody dynamics. *SIAM J. Optim.*, 19(2):969–1001, 2008.
- [7] B. Gavrea and M.D. Rus. On an l_1 -minimization problem from optical flow. *Automation Computers Applied Mathematics*, 22(1):327–335, 2013.
- [8] C. Petra, B. Gavrea, M. Anitescu, and F. Potra. A computational study of the use of an optimization-based method for simulating large multibody systems. *Optimization Methods and Software*, 24(6):871–894, 2009.