REZUMATUL TEZEI DE ABILITARE

cu titlul

APROXIMAŢII SUCCESIVE ÎN CONTEXT CRISP ŞI ÎN CONTEXT FUZZY, ŞI FUNCŢII SPLINE CU PROPRIETĂŢI OPTIMALE

prezentată de către prof. univ. dr. ALEXANDRU MIHAI BICA

DEPARTAMENTUL de MATEMATICĂ şi INFORMATICĂ

UNIVERSITATEA din ORADEA

Aceasta teza este structurata in 5 capitole continand si o bibliografie bogata si se bazeaza pe 47 de articole stiintifice ale autorului, elaborate singur sau un colaborare, si pe rezultatele cuprinse in cele doua monografii de cercetare.(Bica-[62] si Bica-[63]), toate acestea fiind mentionate la bibliografie.

Primul capitol contine rezultatele obtinute de catre autor asupra aplicatiilor teoremei de punct fix a lui Perov la ecuatii integro-diferentiale (de speta a doua, de tip Fredholm si de tip Volterra cu intarziere) si la ecuatii diferentiale de tip neutral, acestea din urma continand probleme de valori initiale pentru ecuatii cu intarziere de ordinele intai si doi, precum si probleme bilocale asociate la ecuatii diferentiale de tip neutral de ordinul doi.

Teorema de punct fix a lui Perov a fost publicata in articolul lui Perov si Kibenko-[201] si este un instrument foarte util in stabilirea existentei si unicitatii solutiei pentru sisteme de ecuatii diferentiale si integrale. Aceasta teorema functioneaza in spatii metrice generalizate, cu metrica luand valori in conul pozitiv al spatiului euclidian si este o teorema de punct fix asupra unui operator al carui spectru este continut in discul unitate deschis din planul complex. Ca o consecinta a acestei teoreme, Ioan Rus a obtinut in [212] si [214] teorema contractiilor fibrate generalizate, care este utila in studiul dependentei netede de parametru a solutiei sistemelor de ecuatii diferentiale si integrale. Ca aplicatii,in acest sens pot fi consultate lucrarile Rus-[212], [214], [215], Bica-[44], [52], Bica-Muresan-Grebenisan-[50], Bica-Muresan-[51], [60].

Ca o prima aplicatie a teoremei lui Perov, putem considera ecuatia integro-diferentiala

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x'(t-\tau)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} g(t, s, x(s), x'(s))ds, & t \in [0, b] \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

care poate fi scrisa sub forma echivalenta a unui sistem de ecuatii integrale

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(0) + \int\limits_{0}^{t} f(s, x(s), y(s-\tau))ds + \\ + \int\limits_{0}^{t} \left(\int\limits_{\eta-\tau}^{\eta} g(\eta, s, x(s), y(s))ds \right) d\eta \quad , \\ f(t, x(t), y(t-\tau)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} g(t, s, x(s), y(s))ds \end{pmatrix}, & t \in [0, b] \\ (x(t), y(t)) = (\varphi(t), \varphi'(t)), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

in care s-a notat $y = x'$, si careia teorema lui Perov i se aplica in spatiul metric generalizat (X, d_B)

$$X = C[-\tau, b] \times C[-\tau, b], \quad d_B : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$d_B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (\|x_1 - x_2\|_B, \|y_1 - y_2\|_B),$$

$$\|u\|_B = \max\{|u(t)| \cdot e^{-\theta(t+\tau)} : t \in [-\tau, b]\}, \quad \forall u \in C[-\tau, b], \quad \theta > 0.$$

operatorului $A : X \longrightarrow X$, $A = (A_1, A_2)$,

$$(A_1(x(t), y(t)), A_2(x(t), y(t))) = (\varphi(t), \varphi'(t)), \qquad \forall t \in [-\tau, 0]$$

$$A_1(x(t), y(t)) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(s), y(s-\tau))ds + \int_0^t \left(\int_{\eta-\tau}^{\eta} g(\eta, s, x(s), y(s))ds \right) d\eta$$

$$A_2(x(t), y(t)) = f(t, x(t), y(t-\tau)) + \int_{t-\tau}^{t} g(t, s, x(s), y(s))ds, \qquad \forall t \in [0, b].$$

Se obtine existenta si unicitatea solutiei acestui sistem de ecuatii integrale, precum si proprietatea de functie Lipschitz pentru solutie si pentru derivata sa. Totodata, este construita si o metoda de stabilire a calitatii de multime de functii uniform Lipschitz pentru termenii sirului aproximatiilor succesive. Asa cum se poate observa, cazul particular in care $f = 0$ si g nu depinde de t corespunde ecuatiei integro-diferentiale din epidemiologie:

$$x'(t) = \int_{t-\tau}^{t} g(s, x(s), x'(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

studiata in Bica-Muresan-[60] privind existenta si unicitatea solutiei pozitive marginite si unde se construieste un algoritm de aproximare a acestei solutii. De asemenea, folosind teorema contractiilor fibrate generalizate, se studiaza in Bica-Muresan-[51], dependenta neteda de intarzierea τ a solutiei periodice a acestei ecuatii cu nucleul periodic in timp.

Un alt exemplu ce ilustreaza eficacitatea teoremei de punct fix a lui Perov la ecuatii de tip neutral este si urmatoarea problema bilocala

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), & x \in [a, b] \\ y(a) = c, \quad y(b) = d \end{cases}$$

studiata in Bica-[58], unde solutia ia valori intr-un spatiu Banach X. Aceasta problema bilocala este echivalenta cu sistemul de ecuatii integrale Fredholm

$$\begin{cases} y(x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot d + \frac{b-x}{b-a} \cdot c - \int_a^b G(x, s) \cdot f(s, y(s), z(s))\, ds \\ z(x) = \frac{d-c}{b-a} - \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) \cdot f(s, y(s), z(s))\, ds, \end{cases} \qquad x \in [a, b]$$

unde s-a notat $z = y'$, iar G este functia Green

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(s-a)(b-x)}{b-a}, & \text{daca } s \leq x \\ \frac{(x-a)(b-s)}{b-a}, & \text{daca } s \geq x. \end{cases}$$

Acestui sistem i se aplica teorema de punct fix a lui Perov in spatiul $Y = C([a,b],X) \times C([a,b],X)$ dotat cu metrica generalizata $d_C : Y \times Y \to \mathbb{R}^2$, definita prin

$$d_C((y_1,z_1),(y_2,z_2)) = (\|y_1 - y_2\|_\infty \ , \ \|z_1 - z_2\|_\infty), \quad \text{pentru } (y_1,z_1),(y_2,z_2) \in Y$$

unde

$$\|y\|_\infty = \max\{\|y(x)\|_X : x \in [a,b]\} \text{ pentru } y \in C([a,b],X).$$

Se obtine existenta si unicitatea solutiei acestei probleme bilocale, propunandu-se si o metoda de aproximare a solutiei ce combina tehnica sirului aproximatiilor succesive cu formula de cuadratura a trapezului stabilita pentru functii Lipschitz cu valori in spatii Banach in Bica-[54].

Dupa cum este binecunoscut, metoda aproximatiilor succesive a fost elaborata independent de catre Picard si Lindelöf in [167] si [203], iar ulterior a fost perfectionata de catre D.V. Ionescu in [149] prin considerarea unei formule de cuadratura cu doua noduri (de obicei formula trapezului sau formule de tip Euler-Mac Laurin) la calculul termenilor sirului aproximatiilor succesive. Doua dezvoltari recente care imbunatatesc metoda aproximatiilor succesive pot fi mentionate, si anume, metoda relaxarilor de tip "waveform" propusa de Lelarasmee et al. in [166], si metoda iteratiilor dinamice propusa de Bjørhus in [89], ambele metode fiind inspirate din iteratiile de tip Gauss-Seidel.

Al doilea capitol este dedicat unor noi proprietati optimale pentru functii spline cubice, obtinute recent in Bica-[73], [81], [84]. Ca aplicatii posibile ale acestor rezultate putem mentiona domeniul roboticii si proiectarea asistata de calculator la scara industriala a profilelor aerodinamice. In general, proprietatile optimale ale functiilor spline, devenite clasice, se refera la curbura minima a functiilor spline cubice (a se vedea Ahlberg et al.-[8], de Boor-[91], Burmeister et al.-[85], Micula-[185], Wolberg-Alfy-[236], Yong-Cheng-[245]), sau la minimizarea in norma L^2 a functiei spline cubice si a derivatelor sale (precum este prezentat in Kobza-[163]), sau implica construirea de procedee suboptimale pentru realizarea functiilor spline cubice de ajustare a datelor experimentale afectate de erori (a se vedea Ichida et al.-[148]). Recent, un alt punct de vedere in stabilirea unor proprietati optimale pentru functiile spline este generat de idea intuitiva de a minimiza devierea functiei spline de la linia poligonala ce uneste datele de intrare, conducand in Floater-[132] la notiunea de deviere locala si globala, iar in Bica-[73], [81], la notiunea de oscilatie patratica in medie (QOA) si respectiv, la cea de oscilatie partiala patratica in medie (PQOA).

Pentru a defini oscilatia patratica in medie (QOA), se considera o diviziune a intervalului $[a,b]$

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

si un set de valori date $y_0, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$. In $C[a,b]$ consideram submultimea $C([a,b],\Delta,y) = \{f \in C[a,b] : f(x_i) = y_i, \quad \forall i = \overline{0,n}\}$.

Definitie (in Bica-[73]): Oscilatia patratica in medie (QOA) a unei functii $f \in C([a,b],\Delta,y)$ este valoarea functionalei $\rho_2 : C([a,b],\Delta,y) \to \mathbb{R}$ definita prin

$$\rho_2(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - \frac{x_i - x}{h_i} \cdot y_{i-1} - \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \cdot y_i]^2 dx}.$$

Aceasta notiune se poate defini pentru orice functie care interpoleaza punctele (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$, si de asemenea pentru orice functie spline de interpolare indiferent de netezimea acesteia sau de gradul sau de deficienta. Asa cum se observa usor, ρ_2 este o functionala pozitiva, $\rho_2(f) \geq 0$, $\forall f \in C([a,b],\Delta,y)$ si $\rho_2(f) = 0$ daca si numai daca f coincide din punct de vedere grafic cu linia poligonala unind punctele (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$. In plus, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, avem $\rho_2(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \rho_2(f)$. Deci, QOA este o functionala pozitiva si omogena. In Bica-[73] s-a determinat in mod unic functia spline cubica $s \in C^1[a,b]$ de tip Hermite ce minimizeaza pe intregul interval $[a,b]$ oscilatia patratica in medie. La problemele in care intentionam sa minimizam oscilatia patratica in medie numai pe unele dintre subintervalele $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, mult mai potrivita este utilizarea notiunii de oscilatie partiala patratica in medie (PQOA), introdusa mai jos.

Definitie (in Bica-[81]): Fie submultimea $K \subset \{1,...,n\}$. Oscilatia partiala patratica in medie a functiei $f \in C([a,b],\Delta,y)$ corespunzand acestei submultimi K, este functionala $\rho(K) : C([a,b],\Delta,y) \to \mathbb{R}$ data prin:

$$\rho(K)(f) = \sqrt{\sum_{i \in K} \int_{I_i} [f(x) - \frac{x_i - x}{h_i} \cdot y_{i-1} - \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \cdot y_i]^2 dx}.$$

Astfel QOA este un caz particular al PQOA corespunzand multimii $K = \{1,...,n\}$. Intrucat pentru minimizarea QOA la functia spline cubica de tip Hermite pe intregul interval $[a,b]$ avem la dispozitie n+1 valori libere m_0, m_1, ..., m_n, adica un grad de libertate n+1, deducem ca functionala QOA este aplicabila la functii spline cu deficienta cel putin 2, pe cand la functiile spline cu deficienta minima, adica deficienta 1, avem la dispozitie mai putine grade de libertate corespunzand parametrilor liberi (de exemplu grad de libertate 2 la functii spline cubice) si atunci nu putem utiliza decat oscilatia partiala PQOA in scopul minimizarii acesteia.

Pentru valori date y_0, y_1, ..., $y_n \in \mathbb{R}$, in expresia functiei spline cubice $s \in C^1[a,b]$ de tip Hermite

$$s(x) = \frac{(x_i - x)^2 (x - x_{i-1})}{h_i^2} \cdot m_{i-1} - \frac{(x - x_{i-1})^2 (x_i - x)}{h_i^2} \cdot m_i +$$

$$\frac{(x_i - x)^2 [2(x - x_{i-1}) + h_i]}{h_i^3} \cdot y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2 [2(x_i - x) + h_i]}{h_i^3} \cdot y_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

unde $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$, raman de determinat valorile parametrilor liberi m_0, m_1, ..., m_n. Acestea reprezinta valorile derivatei functiei spline pe noduri si in absenta specificarii valorilor acestor derivate se pot stabili diverse modalitati de determinare a valorilor m_0, $m_1, ..., m_n$, prin cresterea netezimii si utilizarea unor conditii suplimentare la capetele intervalului (a se vedea functiile spline cubice naturale, complete, periodice sau de tip "not-a-knot"), sau prin diverse metode geometrice (precum cea a lui Akima, sau cea a lui Catmull-Rom), sau prin optimizari de natura geometrica, printre care se numara si cerinta minimizarii QOA. In acest context, s-a obtinut in Bica-[73], urmatorul rezultat remarcabil:

Teorema: Fiind date punctele $(x_i, y_i)\,, i = \overline{0,n}$, exista o unica functie spline cubica de tip Hermite avand oscilatia patratica in medie minima. Acest spline cubic $s \in C^1[a,b]$ poate fi determinat prin aplicarea unui algoritm iterativ. Daca s interpoleaza o functie $f \in C[a,b]$, cu $f(x_i) = y_i$, $\forall i = \overline{0,n}$, atunci eroarea de aproximare este:

$$|f(x) - s(x)| \leq \left(1 + \frac{h^3}{4\overline{h}^3}\right) \cdot \varpi(f,h)\,, \quad \forall x \in [a,b] \tag{1}$$

unde $h = \max\{h_i : i = \overline{1,n}\}$, $\overline{h} = \min\{h_i : i = \overline{1,n}\}$, $\varpi(f,h) \overset{notatie}{=} \max\{\varpi(f,h_i) : i = \overline{1,n}\}$, iar $\varpi(f,\delta) = \sup\{|f(t) - f(s)| : t,s \in [a,b], |t-s| \leq \delta\}$ este modulul uniform de continuitate. In cazul diviziunilor uniforme aceasta estimare devine

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{5}{4} \cdot \varpi(f,h)\,, \quad \forall x \in [a,b]. \tag{2}$$

Observatie: Prin urmare, functia spline cubica obtinuta in teorema de mai sus poseda cea mai mica valoare a QOA dintre functiile spline cubice de tip Hermite. O alta calitate interesanta a acestei functii este faptul ca in (2) constanta $\frac{5}{4}$ este mai mica decat cea corespunzatoare estimarilor pentru celelalte functii spline cubice, precum cea naturala, cea de tip "not-a-knot", ori cea obtinuta de Akima in [9], exprimate prin utilizarea modulului de continuitate. Astfel, putem afirma ca estimarea (1) este mai buna. In plus, asa cum se poate observa in Bica-[81], lungimea graficului este minima, printre functiile spline cubice de tip Hermite, pentru functia spline cubica ce minimizeaza QOA (cu exceptia cazului $m_0 = m_1 = ... = m_n = 0$, ce corespunde tensiunii maxime in clasa functiilor spline cubice cardinale). Insirand aceste trei proprietati remarcabile, ne putem pune intrebarea daca intr-adevar, functia spline cubica obtinuta in teorema precedenta mai pastreaza gradul polinomial 3 pentru fiecare dintre restrictiile sale la subintervalele $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Asa cum este aratat in Bica-[81], restrictiile acestei functii spline cubice $s \in C^1[a,b]$ la intervalele $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, pastreaza intotdeauna gradul 3 ca functii polinomiale, exceptand cazul punctelor coliniare. Mai precis, doar in cazul a cel putin 3 puncte coliniare consecutive $P_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})\,, P_i(x_i, y_i)\,, P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ gradul polinoamelor de pe subintervalele corespunzatoare $[x_{i-1}, x_i]$ si $[x_i, x_{i+1}]$ devine 1, ceea ce din punct de vedere geometric revine la un singur segment ce uneste cele 3 puncte P_{i-1}, P_i, P_{i+1} (cele doua segmente ce apar avand aceeasi panta). Daca $n = 1$, atunci $[a,b] = [x_0, x_1]$ si pe acest interval functia spline cubica cu QOA minima se reduce la un polinom de gradul intai care din punct de vedere grafic reprezinta segmentul ce uneste punctele P_0 si P_1. Daca $n \geq 2$, atunci functia spline cubica $s \in C^1[a,b]$ cu QOA minima are urmatoarea proprietate: ordinul polinomial al restrictiilor sale s_i, $i = \overline{1,n}$, devine mai mic decat 3 daca si numai daca toate punctele interpolate $P_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{0,n}$ sunt coliniare, acest ordin fiind 1 si niciodata 2, iar din punct de vedere geometric, linia poligonala obtinuta devine dreapta ce uneste toate aceste puncte. Daca $n \geq 2$ si nu toate punctele $P_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{0,n}$ sunt coliniare, atunci restrictiile s_i, la intervalele $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, ale functiei spline cubice $s \in C^1[a,b]$ cu QOA minima, sunt polinoame de gradul 3.

In Bica-[81] este realizata o imbunatatire la capetele intervalului a metodei de interpolare a lui Akima. Functia spline cubica a lui Akima (a se vedea Akima-[9]) furnizeaza un mod natural de calcul al valorilor m_0, $m_1, ..., m_n$ generand o procedura de interpolare adecvata problemelor de tip "fitting spline". In aceasta metoda valorile m_i, $i = \overline{0,n}$, sunt determinate in baza unui rationament geometric. Mai precis, fiind date 5 puncte $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,5}$, sunt calculate pantele $p_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$, $i = \overline{1,4}$, si este propusa urmatoarea valoare pentru tangenta in punctul $M_2(x_2, y_2)$:

$$m_2 = \frac{|p_4 - p_3| \cdot p_2 + |p_2 - p_1| \cdot p_3}{|p_4 - p_3| + |p_2 - p_1|}. \tag{3}$$

Aceasta formula (3) este generalizata considerand pantele $p_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$, $i = \overline{0, n-1}$ ce conduc la urmatoarele valori ale derivatelor pe noduri:

$$m_i = \frac{|p_{i+1} - p_i| \cdot p_{i-1} + |p_{i-1} - p_{i-2}| \cdot p_i}{|p_{i+1} - p_i| + |p_{i-1} - p_{i-2}|}, \quad i = \overline{2, n-2}. \tag{4}$$

In scopul extinderii formulei (4) pentru $i = \overline{0,n}$, pantele calculate anterior nu sunt de ajuns si de aceea, Akima propune construirea a inca patru "pante" suplimentare $p_{-1}, p_{-2}, p_n, p_{n+1}$, punand

$$p_{-1} = 2p_0 - p_1, \quad p_{-2} = 3p_0 - 2p_1, \quad p_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}, \quad p_{n+1} = 3p_{n-1} - 2p_{n-2}.$$

Deoarece introducerea artificiala a celor 4 pante suplimentare conduce la un comportament performant doar in cazul nodurilor echidistante, acest aspect nu poate fi considerat ca un punct tare al metodei lui Akima. De accea, in Bica-[81], s-a propus o procedura optimala a calculului celor 4 derivate ramase neprecizate in (4), m_0, m_1, m_{n-1}, m_n (celelalte derivate m_i, $i = \overline{2, n-2}$, fiind calculate prin utilizarea formulei (4)). Acest procedeu optimal se bazeaza pe idea minimizarii partiale a PQOA pentru functia spline cubica pe intervalele din vecinatatea extremitatilor, $[x_0, x_2]$ si $[x_{n-2}, x_n]$. Prin urmare, consideram submultimea $K = \{1, 2, n-1, n\}$. Valorile m_0, m_1, m_{n-1}, m_n sunt unic determinate astfel incat

$$\rho(K)(s) = \sqrt{\sum_{i \in K} \int_{I_i} [s(x) - \frac{x_i - x}{h_i} \cdot y_{i-1} - \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \cdot y_i]^2 dx}$$

sa fie minima pentru $K = \{1, 2, n-1, n\}$.
In plus, pentru functia spline cubica obtinuta, estimarea erorii de aproximare

in interpolarea unei functii $f \in C([a,b],\Delta,y)$ este:

$$|s(x)-f(x)| \leq \left(1+\frac{h}{4\underline{h}}\right)\cdot \varpi(f,h), \quad \forall x \in [x_2,x_{n-2}],$$

si

$$|s(x)-f(x)| \leq \left(1+\frac{h^4}{4\underline{h}^4}\right)\cdot \varpi(f,h), \quad \forall x \in [x_0,x_2]\cup[x_{n-2},x_n],$$

unde $h=\max\{h_i : i=\overline{1,n}\}$, $\underline{h}=\min\{h_i : i=\overline{1,n}\}$, si $\varpi(f,h)=\max\{|f(u)-f(v)| : u,v \in [a,b],\ |u-v| \leq h\}$ este modulul uniform de continuitate. In cazul nodurilor echidistante aceasta estimare devine

$$|s(x)-f(x)| \leq \frac{5}{4}\cdot \varpi(f,h), \quad \forall x \in [x_0,x_n],$$

fiind aceeasi ca in (2). Astfel, aceasta functie spline nou construita poseda atat proprietatile metodei de interpolare a lui Akima pentru "derivatele" m_i, $i=\overline{2,n-2}$, cat si proprietatea de oscilatie minima pe primele doua si ultimele doua subintervale.

In al treilea capitol, este prezentata metoda interpolarilor succesive elaborata recent de catre autor in perioada 2007-2013. In general, aceasta metoda difera de metoda colocatiei sau metoda functiilor spline fiind mai degraba o extindere a metodei aproximatiilor succesive la ecuatii diferentiale sau integrale cu argument modificat. Mai precis, aceasta metoda combina tehnica aproximatiilor succesive sugerata de Picard cu o formula de cuadratura (de obicei cuadratura trapezului) si cu un procedeu de interpolare aplicat la fiecare pas iterativ. Inceputul cercetarilor asupra acestei metode este marcat de lucrarile Bica-[83], [63], Bica-Oros-[56], si continuat in Bica-[57],[71], [72], [79], si Bica-Curilă-[69], [70], [74], [78], [82], [85-87].

In acest context, pentru problema Cauchy de ordinul intai cu argument intarziat (ce include si ecuatia de tip pantograf ca un caz particular cu $a=0$ si $\varphi(t)=\alpha t$, $\alpha \in (0,1)$),

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t),x(\varphi(t))), \quad t\in[a,b] \\ x(a)=x_0 \end{cases}$$

unde $\varphi \in C[a,b]$, $a \leq \varphi(t) \leq b$ si $\varphi(t) \leq t$, $\forall t \in [a,b]$, metoda interpolarilor succesive foloseste in Bica-[79] functia spline cubica naturala ca procedeu de interpolare, conducand la sirul de aproximatii ale solutiei, efectiv calculate, pe o diviziune echidistanta a intervalului $[a,b]$, prin aplicarea urmatorului algoritm:

$$x_m(t_i)=x_0+\frac{(b-a)}{2n}\cdot\sum_{j=1}^{i}[f\left(t_{j-1},\overline{x_{m-1}(t_{j-1})}+\overline{R_{m,j-1}},x_{m-1}(\varphi(t_{j-1}))\right)+$$

$$+f\left(t_j,\overline{x_{m-1}(t_j)}+\overline{R_{m-1,j}},x_{m-1}(\varphi(t_j))\right)]+R_{m,i}=x_0+\frac{(b-a)}{2n}\cdot\sum_{j=1}^{i}[f(t_{j-1},\overline{x_{m-1}(t_{j-1})},$$

$, s_{m-1}(\varphi(t_{j-1})))+f\left(t_j, \overline{x_{m-1}(t_j)}, s_{m-1}(\varphi(t_j))\right)]+\overline{R_{m,i}} = \overline{x_m(t_i)}+\overline{R_{m,i}}, \quad m \in \mathbb{N}^*.$

Aici, $s_{m-1} : [a,b] \to \mathbb{R}$ este functia spline cubica naturala de interpolare a valorilor $\overline{x_{m-1}(t_i)}$, $i = \overline{0,n}$. Restrictiile $s_{m-1}^{(i)}$ ale functiei s_{m-1} la intervalele $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1,n}$ sunt:

$$s_{m-1}^{(i)}(t) = \left[\frac{(t-t_{i-1})^2}{2} - \frac{(t-t_{i-1})^3}{6h} - \frac{h(t-t_{i-1})}{3}\right] \cdot M_{m-1}^{(i-1)} + \frac{t-t_{i-1}}{h} \cdot \overline{x_{m-1}(t_i)} +$$

$$+\left[\frac{(t-t_{i-1})^3}{6h} - \frac{h(t-t_{i-1})}{6}\right] \cdot M_{m-1}^{(i)} + \frac{t_i - t}{h} \cdot \overline{x_{m-1}(t_{i-1})}, \quad t \in [t_{i-1}, t_i],\ i = \overline{1,n}$$

unde $h = \frac{b-a}{n}$, iar valorile $M_{m-1}^{(i)}$, $i = \overline{0,n}$, sunt calculate folosind un algoritm iterativ in care $a_i = 1$, $i = \overline{1,n-1}$, $b_i = c_i = \frac{1}{4}$, $i = \overline{2,n-2}$, $b_1 = c_{n-1} = 0$, $c_1 = b_{n-1} = \frac{1}{4}$

$$d_i = \frac{3}{2h^2} \cdot \left[\overline{x_{m-1}(t_{i+1})} - 2\overline{x_{m-1}(t_i)} + \overline{x_{m-1}(t_{i-1})}\right], \quad i = \overline{1,n-1},$$

si calculand recurent

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{a_1}, \quad \omega_i = a_i - \alpha_{i-1} \cdot b_i, \quad \alpha_i = \frac{c_i}{\omega_i}, \quad i = \overline{2,n-2},$$

$$\omega_{n-1} = a_{n-1} - \alpha_{n-2} \cdot b_{n-1}, z_1 = \frac{d_1}{2}, \quad z_i = \frac{d_i - b_i \cdot z_{i-1}}{\omega_i}, \quad i = \overline{2,n-1}.$$

Prin recurenta inapoi sunt obtinute "momentele":

$$M_{m-1}^{(0)} = M_{m-1}^{(n)} = 0, \quad M_{m-1}^{(n-1)} = z_{n-1}, \quad M_{m-1}^{(i)} = z_i - \alpha_i \cdot M_{m-1}^{(i+1)}, \quad i = \overline{n-2,1}.$$

Acest algoritm contine un criteriu practic de oprire de tip "do-while", care poate fi enuntat astfel: pentru $\varepsilon' > 0$ dat si pentru $n \in \mathbb{N}^*$, ales anterior, se determina cel mai mic numar natural $m \in \mathbb{N}^*$ astfel incat $\left|\overline{x_m(t_i)} - \overline{x_{m-1}(t_i)}\right| < \varepsilon'$, $\forall i = \overline{1,n}$. Algoritmul se opreste la acest pas m, retinand aproximatiile $\overline{x_m(t_i)}$, $i = \overline{1,n}$, ale solutiei.
Convergenta acestei metode este demonstrata oferind o estimare apriori a erorii si aratand ca aceasta metoda este numeric stabila in raport cu alegerea valorii initiale. Acest tip de stabilitate numerica a fost introdusa recent de catre autor si poate fi descrisa pe scurt, astfel.
Considerand aceeasi problema Cauchy, dar cu alta valoare initiala y_0 astfel incat $|x_0 - y_0| < \varepsilon$,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(\varphi(t))), & t \in [a,b] \\ x(a) = y_0. \end{cases}$$

si aplicand acelasi algoritm se obtin valorile calculate efectiv $\overline{y_m(t_i)}$, $i = \overline{1,n}$, $m \in \mathbb{N}^*$ cu $y_m(t_i) = \overline{y_m(t_i)} + \overline{R'_{m,i}}$, $i = \overline{1,n}$, $m \in \mathbb{N}^*$.
Definitie (in Bica-[79]): Spunem ca metoda interpolarilor succesive aplicata

problemei Cauchy de mai sus este numeric stabila in raport cu alegerea valorii initiale daca exista $p \in \mathbb{N}^*$, un sir de functii continue $\mu_m : [0, b-a] \to [0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $\lim\limits_{h \to 0} \mu_m(h) = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ si constantele $K_1, K_2, K_3 > 0$ independente de h, astfel incat

$$\left| \overline{x_m(t_i)} - \overline{y_m(t_i)} \right| \leq K_1 \varepsilon + K_2 \cdot h^p + K_3 \cdot \mu_m(h),$$

pentru orice $i = \overline{1,n}$, $m \in \mathbb{N}^*$.
In mod analog, in Bica-[78], se aplica metoda interpolarilor succesive la problema Cauchy de ordinul doi cu intarziere.

Similar, in Bica-[71], Bica-Curilă-[70], [86], metoda interpolarilor succesive este aplicata la problema bilocala de ordinul doi si patru

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x(\varphi(t))), & t \in [a,b] \\ x(a) = c, \quad x(b) = d \end{cases}$$

respectiv,

$$\begin{cases} x^{IV}(t) = f(t, x(t), x(\varphi(t))), & t \in [a,b] \\ x(a) = c, \qquad x(b) = d \\ x'(a) = w, \qquad x'(b) = r. \end{cases}$$

In acest caz, stabilitatea numerica este considerata in raport cu alegerea valorilor pe frontiera (la capetele intervalului $[a,b]$). Aceste probleme bilocale sunt echivalente cu ecuatia integrala Hammerstein-Fredholm

$$x(t) = g(t) + \int_a^b H(t,s) \cdot f(s, x(s), x(\varphi(s)))\, ds, \quad s \in [a,b]$$

unde $H(t,s)$ este functia Green corespunzatoare,

$$g(t) = \frac{t-a}{b-a} \cdot d + \frac{b-t}{b-a} \cdot c$$

$$H(t,s) = -G(t,s) = \begin{cases} -\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & \text{if } s \leq t \\ -\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & \text{if } s \geq t, \end{cases}$$

pentru ecuatia de ordinul doi, si

$$g(t) = \frac{(b-t)^2 [2(t-a) + (b-a)]}{(b-a)^3} \cdot c + \frac{(t-a)^2 [2(b-t) + (b-a)]}{(b-a)^3} \cdot d +$$

$$+ \frac{(b-t)^2 (t-a)}{(b-a)^2} \cdot w - \frac{(t-a)^2 (b-t)}{(b-a)^2} \cdot r, \quad t \in [a,b]$$

$$H(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(\frac{s-a}{b-a}\right)^2 \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{t-a}{b-a} - \frac{s-a}{b-a}\right) + 2\left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right)\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right], & s \leq t \\ \frac{1}{6} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^2 \left(1 - \frac{s-a}{b-a}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{s-a}{b-a} - \frac{t-a}{b-a}\right) + 2\left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right)\left(\frac{s-a}{b-a}\right)\right], & s \geq t, \end{cases}$$

pentru ecuatia de ordinul patru. Acestei ecuatii integrale i se aplica technica aproximatiilor succesive combinata cu cuadratura trapezului si cu o functie spline cubica de interpolare aplicata la fiecare pas iterativ.

Aceeasi metoda a interpolarilor succesive este aplicata la ecuatii integrale cu argument modificat in Bica-Oros-[56], Bica-[57], [72], Bica-Curilă-[74], stabilitatea numerica fiind considerata in acest caz in raport cu prima iteratie.

Al patrulea capitol contine rezultatele obtinute asupra structurii algebrice a multimii numerelor fuzzy privita din punct de vedere categorial, publicate in Bica-[67]. De asemenea, sunt prezentate metodele numerice iterative construite in Bica-[68], [77] si Bica-Popescu-[75], [80] pentru ecuatii integrale fuzzy. In Bica-[77] sunt investigate proprietatile numerelor fuzzy strict monotone fiind studiata structura algebrica si topologica a multimii acestui tip de numere fuzzy, introducand notiunea de descompunere duala a unui monoid si aratand ca numerele fuzzy strict crescatoare si cele strict descrescatoare realizeaza o asemenea descompunere a monoidului aditiv al numerelor fuzzy. O interpretare interesanta a numerelor fuzzy descrescatoare este prezentata ca o aplicatie in epidemiologie si in statistica medicala. Utilizand metoda lui Picard a sirului aproximatiilor succesive, sunt construite metode numerice iterative pentru ecuatii integrale fuzzy neliniare de tip Fredholm si Hammerstein-Fredholm in Bica-[68] si Bica-Popescu-[80], si pentru ecuatii integrale fuzzy neliniare de tip Volterra cu intarziere constanta in Bica-Popescu-[75].

Ultimul capitol al acestei teze prezinta noi directii de dezvoltare in viitor a activitatii de cercetare, fundamentate pe rezultatele obtinute anterior ce au fost prezentate in celelalte patru capitole. Astfel sunt prezentate posibile modalitati de extindere a metodei interpolarilor succesive la ecuatii diferentiale de tip neutral cu modificare variabila a argumentului si la ecuatii cu avans si intarziere, precum si noi modalitati de adaptare a conceptului de oscilatie patratica in medie la curbe si suprafete parametrizate. Un loc aparte il au problemele deschise privind construirea de operatii aritmetice cu numere fuzzy avand un set mai bogat de proprietati algebrice decat cele existente pana in prezent. Asupra acestor probleme sunt expuse pe scurt unele idei recent dezvoltate de catre autor.