

---

## Rezumatul tezei de abilitare

### Aproximarea prin anumiți operatori pozitivi și liniari

Ana Maria ACU

În această teză descriem rezultatele semnificative obținute de autor după obținerea în 2007 a titlului de doctor în matematică la Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca. Teoria aproximării reprezintă o ramură veche a analizei matematice, care încă a rămas un domeniu de cercetare atractiv, cu multe aplicații. Rezultatele științifice prezentate se referă la aproximarea prin anumite clase de operatori liniari și pozitivi. În prima parte a tezei suntem interesați să studiem cât de non-multiplicativă poate fi o funcțională liniară. Cu scopul de a da un răspuns la această întrebare considerăm funcționala Chebyshev generalizată

$$T_L(f, g) := L(f \cdot g) - L(f) \cdot L(g),$$

unde  $L$  este o funcțională liniară, și obținem estimări de forma

$$|T_L(f, g)| \leq \mathcal{E}(L, f, g).$$

Aceste inegalități au fost aplicate în cazul unor operatori cunoscuți. Estimarea diferențelor de operatori liniari și pozitivi este un alt subiect abordat. În partea a doua a tezei am considerat rezultate de bază și estimări directe în raport cu aproximarea locală și globală pentru anumite clase de operatori liniari și pozitivi. De asemenea, câteva rezultate privind comportarea asimptotică a unor operatori liniari și pozitivi au fost obținute. Rata de convergență în cazul funcțiilor a căror derivată este cu variație mărginită a fost studiată. În ultimul deceniu, aplicații ale  $q$ -calculus reprezintă unul dintre cele mai atractive domenii de cercetare. În 1987, Lupaș a introdus  $q$ -analog al operatorului Bernstein. Mai târziu, în 1997, Phillips consideră o nouă variantă a  $q$ -analog pentru operatorul Bernstein. Mai târziu mulți matematicieni au obținut extinderi în  $q$ -calculus pentru operatorii liniari și pozitivi clasici. În ultimii ani am publicat câteva rezultate ce abordează acest subiect, dar acestea nu au fost incluse în prezenta lucrare ([2], [5], [6], [8], [27], [28]).

As dori să menționez că anumite rezultate au fost obținute în colaborare cu cercetători din Germania, Turcia, India și România, în anumite proiecte de cercetare și ca profesor invitat la diferite seminarii științifice. În 2008 am început colaborarea cu H. Gonska de la Universitatea Duisburg-Essen din Germania, abordând ca și studiu inegalitățile de tip Ostrowski. Această inegalitate a fost introdusă de A.M. Ostrowski în [33], ulterior obținându-se o varietate de forme ale acesteia. Am arătat că nu este necesară condiția de derivabilitate și am obținut o generalizare a inegalității Ostrowski pentru funcții continue oarecare  $f \in C[a, b]$  și anumiți operatori liniari (vezi [10]).

---

În 2010 am continuat colaborarea cu H. Gonska și I. Raşa în timpul vizitei mele la Universitatea Duisburg-Essen din Germania în cadrul programului DAAD dedicat ”Reconstrucției Academice în sud-estul Europei”, considerând inegalitățile de tip Grüss pe spațiul funcțiilor continue definite pe un spațiu metric compact (see [11]). Folosind cel mai mic majorant concav al modulului de continuitate am obținut o inegalitate de tip Grüss pentru funcționala  $L(f) = H(f; x)$ , unde  $H : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  este un operator pozitiv și liniar și  $x \in [a, b]$  este fixat. Am aplicat această inegalitate în cazul unor operatori clasici, ca de exemplu Bernstein, operatorii de interpolare Hermite-Fejér, operatorii de tip convoluție. Mai mult, am obținut inegalități de tip Grüss folosind teorema de media a lui Cauchy. De asemenea, am studiat inegalitățile de tip Grüss pe un spațiu metric compact pentru mai mult de două funcții. Mai târziu acest important studiu a fost continuat de H. Gonska, I. Raşa, G. Tachev, B. Gavrea, M. Rusu, I. Gavrea, N. Minculete, L. Ciurdariu în [18], [19], [21], [22], [31], [37].

Colaborarea cu H. Gonka a continuat în 2015 în timpul vizitei sale la Universitatea ”Lucian Blaga” din Sibiu. În această perioadă ne-am ocupat de șirul operatorilor Bernstein bidimensionali compoziți și de formula de cuadratură asociată acestora. Aceste rezultate reprezintă o continuare a cercetarilor facute în [23]. Marginea superioară a termenului rest în formula de cuadratură este dată utilizând modulul de continuitate de ordinul doi (vezi [7]). Studiul nostru este motivat de seria recentă de articole publicate de Bărbosu, Miclăuș și Pop (vezi [13]-[15]).

În 2013, în timpul unei mobilități Erasmus la Universitatea Duisburg-Essen din Germania am pus bazele unei bune colaborări cu Maria Rusu, obținând astfel inegalități de tip Grüss pentru cazul bidimensional utilizând oscilații discrete și am aplicat aceste rezultate în cazul operatorilor liniari bidimensionali clasici, (nu în mod necesar) pozitivi. De asemenea, am obținut inegalități de tip Grüss pentru mai mult de două funcții utilizând oscilații discrete (vezi [9]).

În 2014, motivați de recente rezultate ce dau o soluție a problemei propuse de A. Lupaș în [30], am introdus noi inegalități pentru diferențele anumitor operatori pozitivi și liniari (vezi [4]).

În 2015, în timpul vizitei în calitate de profesor invitat la Universitatea Kirikkale din Turcia am colaborat cu T. Acar și G. Ulusoy. Discuția noastră cu privire la modificarea Kantorovich de ordin  $k$  a operatorilor Baskakov s-a concretizat în articolul [1]. O altă direcție de cercetare în aricolele mele se referă la studiul proprietăților de aproximare ale unor operatori bazați pe distribuția Pólya. Acest subiect a fost tratat în câteva articole cu matematicieni din India (V. Gupta, P.N. Agrawal, T. Neer).

Teza conține șapte capitole, ultimul fiind dedicat descrierii unor planuri de viitor privind cariera științifică și profesională a autoarei. La începutul fiecărui capitol menționăm articolele în care rezultatele prezentate au fost obținute.

În **primul capitol** sunt prezentate noțiunile preliminare ce vor fi utilizate în obținerea rezultatelor, ca modulul de continuitate,  $K$ - funcționala și legătura cu modulul de continuitate, spațiul ponderat și modulul de continuitate corespunzător, operatorii pozitivi și liniari.

**Capitolul 2** este dedicat contribuției autoarei privind inegalitățile de tip Grüss pe spațiul funcțiilor continue definite pe un spațiu metric compact și aplicațiilor acestor inegalități în cazul operatorilor clasici. Rezultatele noastre sunt motivate de o teoremă ce poate fi găsită în articolul [12] al lui D. Andrica și C. Badea. Dorința noastră în acest capitol este de a privi inegalitatea

---

Grüss dintr-un alt punct de vedere. Suntem interesați în a studia cât de non-multiplicativă poate fi o funcțională liniară.

Fie  $H_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  un șir de operatori ce reproduc funcții constante. Pentru  $x \in [a, b]$  considerăm  $L = \epsilon_x \circ H_n$ , so  $L(f) = H_n(f; x)$ . Notăm

$$D(f, g) := H_n(fg; x) - H_n(f; x) \cdot H_n(g; x).$$

În acest capitol am obținut un rezultat ce sugerează cât de non-multiplicativă este funcționala  $L(f) = H_n(f; x)$  pentru  $x \in [a, b]$ . Aplicații ale acestui rezultat în cazul operatorilor clasici au fost considerate. De asemenea, am studiat non-multiplicativitatea funcționalei  $L$  folosind teorema de medie a lui Cauchy. Acest studiu a fost motivat de rezultatul lui B.G. Pachpatte publicat în [34].

În **capitolul 3** am obținut o nouă margine a erorii de aproximare în cazul formulei de cubatură asociată operatorilor Bernstein bidimensionali. Marginile au fost descrise utilizând modulul de continuitate de ordinul 2. Studiul acestei formule de cubatură a fost motivat de rezultatul lui Bărbosu și Pop [14]. De asemenea, am construit operatorii Bernstein bidimensionali compoziți și am studiat ordinul de convergență utilizând modulul de continuitate de ordinul doi. Câteva tipuri de inegalități de tip Grüss au fost considerate. Aceste rezultate au fost obținute aplicând inegalități generale publicate în [36]. Un alt studiu prezentat în acest capitol se referă la inegalitățile de tip Grüss obținute cu ajutorul oscilațiilor funcțiilor.

În **capitolul 4** am introdus noi inegalități pentru diferențele de operatori liniari și pozitivi în termenii modulului de continuitate. Aceste rezultate au la bază anumite inegalități obținute pentru funcționale liniare. Mai întâi am stabilit astfel de inegalități pentru funcții derivabile și pentru normele derivatelor acestor funcții. Utilizând apoi rezultatele din [24] și [25] am obținut inegalități pentru funcții continue în termenii modulului de continuitate. În ultima secțiune a acestui capitol am aplicat aceste rezultate generale unor operatori pozitivi și liniari.

În **capitolul 5** am studiat proprietăți de aproximare ale unor operatori bazați pe distribuția Pólya folosind funcția  $\tau$ . Această funcție este definită pe intervalul  $[0, 1]$  și este indefinit continuu diferentiabilă astfel încât  $\tau(0) = 0$ ,  $\tau(1) = 1$  și  $\tau'(x) > 0$  pentru  $x \in [0, 1]$ . Notăm că mulțimea Korovkin  $\{1, e_1, e_2\}$  este generalizată prin  $\{1, \tau, \tau^2\}$  și acești operatori prezintă un grad de aproximare mai bun decât versiunea inițială. Am obținut teoreme de aproximare ce implică modulul de continuitate Ditzian-Totik și o teoremă de tip Voronovskaja. În secțiunea a doua am introdus varianta Bézier a operatorilor de tip genuine-Durrmeyer bazați pe distribuția Pólya. Am obținut o teoremă de aproximare globală ce implică modulul de continuitate de ordinul 2, o teoremă de aproximare directă utilizând modulul de continuitate Ditzian-Totik și o teoremă de tip Voronovskaja. Rata de convergență pentru funcții ale căror derivate au variație mărginită a fost obținută. Mai mult, utilizând grafice realizate în Maple am pus în evidență rata de convergență a acestor operatori pentru anumite funcții. Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate în [3] and [32].

**Capitolul 6** conține un studiu cu privire la modificarea Kantorovich de ordin  $k$  a operatorilor Baskakov. Pentru început am stabilit formulele explicite dând imaginile monoamelor și momentele centrale până la ordinul 6. De asemenea am demonstrat o teoremă de tip Voronovskaja pentru acești operatori pe spații ponderate.

---

**Capitolul 7** prezintă un plan de perspectivă cu privire atât la activitatea de cercetare, cât și la cea didactică. Intenționez să continui activitatea de cercetare în domeniul aproximării prin operatori liniari și pozitivi. În egală măsură îmi voi îndrepta atenția și către inegalitățile matematice și aplicațiile acestora în domeniul operatorilor liniari și pozitivi. De asemenea, mi-am propus să scriu două monografii ce vor cuprinde contribuții personale cu privire la formulele de aproximare ale integralelor definite, precum și un istoric al inegalităților de tip Grüss și Ostrowski și aplicații ale acestora în contextul aproximării prin operatori liniari și pozitivi.

În teoria aproximării prin operatori liniari și pozitivi, operatorii Baskakov și Szász-Mirakjan sunt două dintre cele mai utilizate instrumente folosite în aproximarea funcțiilor pe intervale nemărginite. Acesta este motivul pentru care intenționez să demarez un nou proiect de cercetare cu Purshottam Agrawal și Arun Kajla privind operatorii Baskakov-Szász bazați pe distribuția Pólya-Eggenberger. Inspirați de recente rezultate ale lui Gupta și Greubel [26], doresc să pun bazele unei viitoare colaborări cu Vijay Gupta privind studiul unor operatori de tip Baskakov-Szász-Mirakjan.

În [29] a fost introdus operatorul Jakimovski-Leviatan de tip Durrmeyer. Motivați de acest rezultat îmi doresc să aprofundez acest subiect propunând împreună cu Purshottam Agrawal și Trapti Neer noi rezultate. Intenționăm să introducem varianta Chlodowsky a acestor operatori și să obținem rata de convergență utilizând modulul de continuitate. De asemenea vom studia comportarea asimptotică a acestor operatori și vom da câteva proprietăți de aproximare pe spații ponderate.

În [4] am obținut câteva inegalități pentru funcționale liniare utilizând formula lui Taylor. Aceste rezultate ne-au condus către noi estimări ale diferențelor unor operatori liniari și pozitivi. Aplicații pentru operatori clasici au fost de asemenea considerate. Imi doresc să continui cu Ioan Rașa acest proiect ocupându-ne de obținerea estimărilor unor astfel de diferențe pentru operatori pozitivi și liniari ce implică derivatele acestora.

De asemenea, intenționez să mă ocup de studiul  $P_n$ -funcționalelor simple. Estimări ale acestor funcționale utilizând cel mai mic majorant concav al modulului de continuitate au fost considerate de Gavrea (vezi [16], [17]) și Rașa [35]. Aceste rezultate mă motivează să studiez proprietăți de aproximare pentru operatori pozitivi și liniari utilizând estimări ale  $P_n$ -funcționale simple.

## Bibliografie

- [1] T.Acar, A.M. Acu, G. Ulusum, *Pointwise convergence of differentiated Bakakov operators*, (submitted to Quaestiones Mathematicae)
- [2] A.M. Acu, C.V. Muraru, V.A. Radu, *On the monotonicity of  $q$ -Schurer-Stancu type polynomials*, Miskolc Mathematical Notes (accepted).
- [3] A.M. Acu, P.N. Agrawal, T. Neer *Approximation properties of the modified Stancu operators*, (submitted to Numerical Functional Analysis and Optimization).
- [4] A.M. Acu, I. Rasa, *New estimates for the differences of positive linear operators*, Numerical Algorithms, DOI: 10.1007/s11075-016-0117-8.
- [5] A.M. Acu, C. Muraru, *Approximation Properties of Bivariate Extension of  $q$ -Bernstein-Schurer-Kantorovich operators*, Results in Mathematics, 67(3-4), 2015, 265-279.
- [6] A.M. Acu, *Stancu-Schurer-Kantorovich operators based on  $q$ -integers*, Applied Mathematics and Computation, 259, 2015, 896-907.
- [7] A.M. Acu, H. Gonska, *Composite Bernstein Cubature*, Banach Journal of Mathematical Analysis, Vol. 10, No.2, 2016, 235-250.
- [8] A.M. Acu, D. Bărbosu, F. Sofonea, *Note on a  $q$ -analogue of Stancu-Kantorovich operators*, Miskolc Mathematical Notes, 16(2), 2015, 3-15.
- [9] A.M. Acu, M.D. Rusu, *New results concerning Chebyshev-Grüss-type inequalities via discrete oscillations*, Applied Mathematics and Computation, 243, 2014, 585-593.
- [10] A.M. Acu, H. Gonska, *Ostrowski-type inequalities and moduli of smoothness*, Results in Mathematics, Volume 53, No. 3-4, July 2009, 217-228.
- [11] A.M. Acu, H. Gonska, I. Raşa, *Grüss- and Ostrowski-type in Approximation Theory*, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 63, No. 6, November, 2011, 843-864.
- [12] D. Andrica, C. Badea, *Grüss' inequality for positive linear functionals*, Periodica Math. Hung., 19, 1988, 155-167.
- [13] D. Bărbosu, D. Miclăuş, *On the composite Bernstein type quadrature formula*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., 39(1), 2010, 3-7.
- [14] D. Bărbosu, O. Pop, *A note on the Bernstein's cubature formula*, Gen. Math., 17(3), 2009, 161-172.

- [15] D. Bărbosu, O. Pop, *On the Bernstein bivariate approximation formula*, Carpathian J. Math., 24(3), 2008, 293-298.
- [16] I. Gavrea, *Estimations for  $P_n$ -simple functionals*, Results in Mathematics, 53, 2009, 269-277.
- [17] I. Gavrea, *Preservation of Lipschitz constants by linear transformations and global smoothness preservation*, Functions, Series, Operators (L. Leindler, F. Schipp, J. Szabados, eds.), Budapest, 2002, pp. 261-275.
- [18] B. Gavrea, *Improvement of some inequalities of Chebyshev-Grss type*, Computers & Mathematics with Applications 64(6) 2012, 2003-2010.
- [19] I. Gavrea, G. Tachev, *On the multiplicativity of linear operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 408(1), 2013, 203-208.
- [20] H. Gonska, I. Raşa, M.D. Rusu, *Chebyshev-Grüss-type inequalities via discrete oscillations*, Bul Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat., 74(1), 2014, 63-89.
- [21] H. Gonska, I. Raşa, M.D. Rusu, *Čebyšev-Grüss-type inequalities revisited*, Math. Slovaca, 63(5), 2013, 1007-1024.
- [22] H. Gonska, I. Raşa, M.D. Rusu, *Applications of an Ostrowski-type inequality*, J. Comput. Anal. Appl. 14, 2012, 19-31.
- [23] H. Gonska, I. Rasa, *Sur la suite des opérateurs Bernstein composés*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., 42(2), 2013, 151-160.
- [24] H. Gonska, R. Kovacheva, *The second order modulus revised: remarks, applications, problems*, Confer. Sem. Mat. Univ. Bari, 257, 1994, 1-32.
- [25] H. Gonska, *Degree of approximation by lacunary interpolators:  $(0, \dots, R-2, R)$  interpolation*, Rocky Mountain J. Math., 19, 1989, 157-171.
- [26] V. Gupta and G. C. Greubel, *Moment Estimations of new Szász-Mirakyan-Durrmeyer operators*, Appl. Math. Comput. 271, 2015, 540-547.
- [27] S.M. Kang, A.M. Acu, A. Rafiq, Y.C. Kwun, *On q-analogue of Stancu-Schurer-Kantorovich operators based on q-Riemann integral*, Journal of Computational Analysis and Applications, Vol. 21, No. 3, 2016, 564-577.
- [28] S.M. Kang, A.M. Acu, A. Rafiq, Y.C. Kwun, *Approximation properties of q-Kantorovich-Stancu operator*, Journal of Inequalities and Applications, Article Number: 211 Published: Jun 27, 2015.
- [29] A. Karaisa, *Approximation by Durrmeyer type Jakimoski-Leviatan operators*, Math. Method Appl. Sci., DOI: 10.1002/mma.3650.
- [30] A. Lupaş, *The approximation by means of some linear positive operators*, in Approximation Theory (M.W. Müller et al., eds), Akademie-Verlag, Berlin, 1995, 201-227.

- [31] N. Minculete, L. Ciurdariu, *A generalized form of Grss type inequality and other integral inequalities*, Journal of Inequalities and Applications 2014, 2014:119.
- [32] T. Neer, A.M. Acu, P.N. Agrawal, *Bézier variant of genuine-Durrmeyer type operators based on Pólya distribution*, Carpathian Journal of Mathematics, No 1, 2017.
- [33] A. Ostrowski, *Über die Absolutabweichung einer differentiierebaren Funktion von ihrem Integralmittelwert*, Comment. Math. Helv., 10 (1938), 226-227.
- [34] B.G. Pachpatte, *A note on Grüss type inequalities via Cauchy's mean value Theorem*, Mathematical Inequalities Applications, 11(1), 2007, 75-80.
- [35] I. Raşa, *Sur les fonctionnelles de la forme simple au sens de T. Popoviciu*, L'Anal. Num. et la Theorie de l'Approx., 9, 1980, 261-268.
- [36] M.D. Rusu, *Chebyshev-Grüss- and Ostrowski-type Inequalities*, PhD Thesis, Duisburg-Essen University, 2014.
- [37] G. Tachev, *On multiplicativity of the Bernstein operator*, Computers & Mathematics with Applications, 62(8), 2011, 3236-3240.