Rezumatul tezei de abilitare

COMPORTAMENTE ERGODICE ŞI ASIMPTOTICE ALE OPERATORILOR LINIARI, SIMILARITATE CU CONTRACŢII ŞI ANALIZĂ HARNACK

LAURIAN SUCIU

Prezenta teză de abilitare prezintă rezultatele ştiinţifice semnificative ale autorului, apărute după obţinerea titlului de Doctor în Matematică la Universitatea Claude Bernard Lyon 1 din Franţa, în 1.12.2006.

Activitatea ştiinţifică după anii 2006 se referă la studiul unor clase de operatori liniari şi mărginiţi pe spaţii Banach, semi-Hilbert şi Hilbert, care generalizează contracţiile hilbertiene, sau sunt în legătură cu conceptele de normalitate, izometrie şi de quasi-similaritate.

In principal, rezultatele ştiinţifice au fost obţinute prin colaborări cu cercetători de la alte universităţi europene, în cadrul unor proiecte de cercetare şi ca profesor invitat în seminarii ştiinţifice, sau pentru a desfăşura activităţi didactice. Astfel, am continuat colaborarea cu Gilles Cassier la Universitatea Lyon 1 în 2007-2008, având în studiu clase noi de operatori similari cu contracţii, incluzând operatorii de clasă C_ρ în sensul Sz.-Nagy-Foias [86]. Aceste rezultate şi alte proprietăţi de conservare prin calculul funcţional Sz.-Nagy-Foias, în contextul A-contracţiilor, au fost obţinute în [17].

Reamintesc că teza mea de doctorat prezintă un studiu sistematic, complet nou, al A-contracţiilor T, adică satisfăcând $T^*AT \leq A$, cu $A, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ şi $A \geq 0$ pe un spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$. Acest studiu se referă la proprietăţi ergodice, asimptotice şi structurale, cu aplicaţii la alte clase de operatori (vezi [72–75]). Aceste rezultate urmează linia cercetărilor dezvoltate recent de G. Corach, A. Maestripieri, D. Stojanoff, L. Arias, C. Gonzales, [21], [6, 7], G. Cassier [15, 16], C. Kubrusly [42], L. Kerchy [36, 37], M. Patel [57, 58].

Mai departe, împreună cu M. Mbekhta la Universitatea Lille 1, în 2007 şi 2011 am studiat anumite clase de operatori similari cu izometrii parţiale (quasinormale). Acest studiu important a fost iniţiat de L. Fialkow [28], apoi continuat de Badea-Mbekhta [8], P. Petitcunot [59] şi Mbekhta-Suciu [48–50]. Reamintim aici cazul special al similarităţii cu izometrii (sau operatori unitari) iniţiat de B. Sz.-Nagy [85].

In 2008 am obţinut un contract de cercetare în proiectul european TODEQ, la Institutul de Matematică al Academiei Poloneze de Ştiinţe din Varşovia, pe care l-am continuat şi în 2010. Aici am avut discuţii ştiinţifice cu J. Zemánek (Varşovia), M. Lin (Beersheva), D. Shoikhet (Karmiel), V. Müller (Praga), Y. Lyubich (Technion, Tel Aviv), Y. Tomilov (Torun), Z. Leka (Budapest), D. Tsedenbayar (Ulan-Bator). In acest cadru am fost interesat de teoria ergodică operatorială clasică, în special referitoare la mediile Cesàro şi Abel, având în vedere că mulţi dintre matematicienii menţionaţi mai sus sunt binecunoscuţi în acest domeniu. Reamintim că ergodicitatea operatorială a fost încurajată prin contribuţiile unor mari matematicieni ca G. Birkhoff, L. Alaoglu, J. von Neumann, F. Riesz, W. F. Eberlein, E. Heinz, E. Hille, E. Hoph, S. Kakutani, N. Dunford, E. R. Lorch, Sz.-Nagy, K. Yoshida şi alţii.

In cadrul proiectului TODEQ am concretizat 3 lucrări ştiinţifice. Astfel, cu J. Zemánek am obţinut în [82] diferite rezultate privind convergenţa tare sau uniformă a mediilor Cesàro de ordin superior $\{M_n^{(p)}(T)\}$, prin condiţii de dominare de tip Allan-Ransford [2]. In acest context am descris comportamentul mediilor Cesàro în condiţia spectrală $\sigma(T) \subset \mathbb{D} \cup \{1\}$, $\mathbb{D}$ fiind discul unitate deschis şi $\sigma(T)$ spectrul lui T, care apare în faimoasa teoremă a lui Esterle-Katznelson-Tzafriri [26], [35] şi care la rândul ei generalizează un rezultat cunoscut al lui I. Gelfand [32]. Condiţia spectrală de mai sus oferă o situaţie extremă în ergodicitatea operatorială, chiar în contextul operatorilor cu puteri nemărginite.

In altă direcţie, împreună cu M. Lin şi D. Shoikhet am studiat în [44] convergenţa (adică ergodicitatea) uniformă a mediilor Cesàro şi Abel, într-un spaţiu Banach $\mathcal{X}$, ultimile medii fiind definite prin $A_\theta(T) = (1-\theta)\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n T^n$, pentru $\theta \in (0,1)$ şi $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. In fapt, arătăm că ergodicitatea Abel uniformă este echivalentă cu convergenţa uniformă a puterilor uneia (tuturor) din mediile A_θ şi în plus este echivalentă cu ergodicitatea Cesàro uniformă când $\|T^n\|/n \to 0$, iar în cazul operatorilor pozitivi pe latici Banach, ultima condiţie nu se mai impune. Rezultate similare au fost obţinute pentru C_0 semigrupuri de operatori, unde in locul lui $\{A_\theta\}$ familia rezolventă $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ este considerată. Pe de altă parte, împreună cu M. Lin în [46] am studiat ecuaţia Poisson $(I-T)x = y$ pentru anumiţi $y \in \mathcal{X}$, în contextul Cesàro ergodicităţii slabe. Ca aplicaţie importantă obţinem noi caracterizări ale reflexivităţii unui spaţiu Banach, care se referă la operatori Cesàro ergodici fără puteri mărginite, în contrast cu rezultatul cunoscut al lui Fonf-Lin-Wojtaszczyk [31].

In ultimii ani, cercetările privind ergodicitatea operatorială vizează medii mai generale, din închiderea acoperirii convexe $\kappa(T)$ a unui operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Anumite rezultate ergodice apar în monografia lui U. Krengel [41] şi mai recent în [27], dar şi în alte lucrări precum L. W. Cohen [20], N. Dungey [23], W. F. Eberlein [24], A. V. Romanov [64], M. Schreiber [66], J. Glück [33]. Dar chiar dacă unele dintre acestea se referă la familii sau semigrupuri de operatori, cazul discret conduce la operatori cu puteri mărginite, unde rezultatele importante pot fi mai uşor identificate.

Beneficiind de o invitaţie la Universitatea din Lund în 2012, împreună cu A. Aleman în [1] am început studiul unor şiruri generale $\{T_n\} \subset \kappa(T)$ de forma $T_n = \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj} T^j$, $t_{nj} > 0$, $\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj} = 1$. Un prim rezultat important este o versiune generalizată a cunoscutei teoreme a lui O. Nevanlinna [56], care spune că dacă măsura Lebesgue a lui $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ este zero, ($\mathbb{T}$ fiind cercul unitate) pentru un operator Kreiss mărginit care înseamnă $\sup_{|\lambda>1}(|\lambda|-1)\|(\lambda I - T)^{-1}\| < \infty$, atunci $\|T^n\|/n \to 0$. Aici ingredientul principal a fost conceptul nou introdus, de "backward iterate" $\{T_n^{-1}\}$ asociată lui T_n. Rezultatul nostru impune o mărginire ponderată şi uniformă pentru $\lambda \in \mathbb{T}$ a şirurilor $\{T_{n\lambda}\}$ şi $\{T_{n\lambda}^{-1}\}$, iar ponderile se reflectă şi în concluzia de convergenţă uniformă de mai sus. O altă direcţie avută în vedere în [1] a fost de a evidenţia proprietăţi ergodice ale operatorilor superciclici T prin intermediul unor asemenea şiruri. Aceşti operatori sunt pe larg studiaţi în ultimii ani (vezi [10]), însă rezultatul ergodic cunoscut este doar teorema Ansari-Bourdon [5], care spune că $\|T^n\| \to 0$ când T este superciclic şi cu puteri mărginite pe un spaţiu Banach separabil. In [1] am dat o descriere completă a convergenţei tari a unui şir mărginit care, în plus, satisface o condiţie de regularitate. Aceasta este o condiţie naturală, fiind satisfacută chiar uniform în cazul mediilor Cesàro mărginite. Astfel, în spaţii reflexive obţinem o generalizare efectivă a rezultatului Ansari-Bourdon, anume că orice medie Cesàro mărginită a unui operator superciclic converge tare la proiecţia ergodică P_T pe punctele fixe ale operatorului.

In cadrul Proiectului TODEQ am avut colaborări ştiinţifice şi cu matematicieni din renumita Şcoală de Analiză Funcţională şi Teoria Operatorilor din Cracovia, în special de la Universitatea Tehnică AGH şi Universitatea Jagiellonă. Aici am avut stagii de cercetare în 2008, 2010 şi 2014 şi o parte din discuţiile cu P. Cojuhari şi W. Majdak şi independent cu N. Secelean s-au concretizat în lucrarea [47]. Pe scurt, aici studiem comportări ergodice ale operatorilor cu puteri mărginite în spaţii semi-Hilbert, unde semi-produsul scalar este indus de un operator pozitiv A pe un spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$. Astfel, am continuat studiul iniţiat în teza de doctorat privind ergodicitatea A-contracţiilor. Ingredientul esenţial care intervine în acest nou context, specific spaţiilor Hilbert, este cel de operator ortogonal ergodic, adică Cesàro ergodic cu P_T proiecţie ortogonală (cum sunt contracţiile, spre exemplu). Anumite conexiuni cu cercetări recente ale lui L. Kerchy [36, 37] privind limitele asimptotice generalizate şi "aproape convergenţa", precum şi cu cele ale lui Müller-Tomilov [53] privind quasi-similaritatea cu contracţii sunt valorificate.

O altă direcţie abordată priveşte structura (bi-) contracţiilor hilbertiene şi comportările asimptotice ale acestora. In acest sens, împreună cu M. Kosiek de la Universitatea Jagiellonă din Cracovia am introdus limita asimptotică pentru bicontracţii în [40], cu ajutorul căreia am evidenţiat anumite subspaţii invariante şi descompuneri ortogonale în acest context. Mai precis am obţinut descompuneri de tip Sz.-Nagy-Foias-Langer-Kubrusly pentru bicontracţii şi descompuneri de tip Wold-Slocinski pentru bi-izometrii. Mai mult, pentru acestea din urmă chiar descompunerile generale în sensul lui D. Popovici [63] şi Bercovici-Douglas-Foias [11] au fost exprimate în termenii limitei asimptotice. Impreună cu N. Suciu de la Universitatea de Vest din Timişoara am continuat în [80] studiul proprietăţilor asimptotice ale bicontracţiilor, analizând cazul când limita asimptotică este o proiecţie ortogonală, sau rolul acesteia în studiul operatorilor Toeplitz generalizaţi pentru bicontracţii, în sensul celui întreprins de R. G. Douglas [22].

O direcţie importantă de cercetare, în care Şcoala românească de matematică are contribuţii esenţiale şi de care am fost interesat în toată evoluţia mea ştiinţifică este Analiza Harnack operatorială. In esenţă, aceasta oferă un cadru operatorial adecvat (contracţii, sau sisteme (ne-)comutative de operatori) în care inegalităţile clasice ale lui Harnack pot fi studiate sub diferite aspecte, în special în conexiune cu rezultate din teoria dilatării şi liftării intervertitorilor. Cadrul cel mai adecvat este cel al contracţiilor, având în vedere că acestea au dilatări (lifturi) izometrice minimale unice în sensul [86]. In acest context, I. Suciu de la Institutul de Matematică Simion Stoilow al Academiei Române a extins în [68, 69] inegalităţile Harnack

$$\frac{1-r}{1+r}u(0) \leq u(z) \leq \frac{1+r}{1-r}u(0), \quad z = re^{i\theta}, \quad 0 < r < 1$$

unde $u \geq 0$ este funcţie armonică pe $\mathbb{D}$, la calculul funcţional Nagy-Foias pentru contracţii, în forma : $\exists c \geq 1$ astfel că pentru orice $f \in A(\mathbb{D})$, $\mathrm{Re} f \geq 0$,

$$\frac{1}{c}\mathrm{Re} f(T_1) \leq \mathrm{Re} f(T_0) \leq c\mathrm{Re} f(T_1)$$

dacă $\|T_j\| \leq 1$, $j = 0, 1$. Prin această extensie s-a introdus o relaţie de echivalenţă în mulţimea contracţiilor pe un spaţiu Hilbert, clasele de echivalenţă fiind numite părţi Harnack. Cele triviale (unipunctuale) sunt doar ale izometriilor sau coizometriilor, cum a fost arătat în [38], iar C. Foias [29] a arătat că contracţiile stricte formează partea Harnack a contracţiei nule.

Alte aspecte ale dominării (echivalenţei) Harnack au fost studiate de Ando-Suciu-Timotin [4], N. Suciu [83], I. Suciu [70, 71]. Mai recent, împreună cu C. Badea (Lille) şi D. Timotin (IMAR-Bucureşti), în [9] am determinat elementele maximale ale relaţiei de dominare Harnack, arătând că acestea sunt operatorii unitari singulari. Proprietătile de conservare prin dominarea Harnack vizează limita asimptotică, stabilitatea şi descompunerile ortogonale (unitare, izometrice), iar rezultatele obţinute în [9] dovedesc sau nu permanenţa acestora.

Intr-un alt sens, dominarea Harnack a fost extinsă în contextul bicontracţilor de N. Suciu [84]. Insă un studiu mai amănunţit al acesteia impune o relaţie de dominare de tip Harnack între contracţii pe spaţii Hilbert diferite. Motivaţia este neunicitatea dilatării Ando (izometrice sau unitare) minimale a unei bicontracţii, având diverse posibilităţi de alegere prin teorema Sz.-Nagy-Foias de dilatare a intervertitorilor (spre exemplu). Astfel, în [76] am studiat o astfel de dominare Harnack generalizată între contracţii, folosind ca instrument principal structura geometrică a spaţiului dilatării izometrice minimale. Ca aplicaţie directă am obţinut rezultate privind dilatarea intervertitorilor de bicontracţii, precum şi o relaţie de dominare laterală a bicontracţilor, mai particulară (tare) decât dominarea Harnack [77]. Mai mult, în [79] am arătat că pentru anumite părţi Harnack de bicontracţii se poate obţine o selecţie continuă de măsuri semispectrale echivalente Harnack, continuitatea referindu-se la topologiile induse de metricile hiperbolice corespunzătoare.

Alte inegalităţi de tip Harnack, Fan sau Borel-Carathéodory au fost obţinute pentru bicontracţii stricte în [78, 81], unde chiar versiunile scalare sunt noi şi interesante fiind în legătură cu lema Schwarz pentru bidiscul $\mathbb{D}^2$.

In expunerea de mai sus am prezentat pe scurt doar ideile principale care au fost fructificate prin colaborare. Alte rezultate obţinute individual după obţinerea titlului de doctor se referă la aceleaşi direcţii de cercetare, sau domenii conexe şi sunt prezentate mai jos. Toate rezultatele cuprinse în această teză au fost prezentate la conferinţe internaţionale şi naţionale, sau în diferite seminarii ştiinţifice ale universităţilor vizitate din : Lyon, Lille, Bordeaux, Besancon, Varşovia, Cracovia, Jurata, Ustryski-Dolne, Lund, Szeged, Nemecka, Bucureşti, Iaşi, Timişoara, Sibiu.

Teza este organizată în opt capitole, ultimul fiind dedicat descrierii unui proiect de viitor privind cariera ştiinţifică şi profesională a autorului. La începutul fiecărui capitol menţionăm lucrările din care sunt prezentate rezultatele şi ideile principale ale acestora. In primele secţiuni ale unor capitole introducem terminologia şi notaţiile care vor fi folosite în continuare. Pentru simplicitate am selectat rezultatele importante cu anumite consecinţe, aplicaţii şi exemple. Demonstraţiile se dau doar pentru teoreme, însă cele mai tehnice sunt omise.

In continuare descriem pe scurt conţinutul fiecărui capitol şi menţionăm teoremele ce conţin rezultatele semnificative.

Capitolul 1 se referă, în principal, la operatori Cesàro şi Abel uniform ergodici, adică având mediile $\{M_n(T)\}$ şi $\{A_\theta(T)\}$ convergente în norma lui $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, limita fiind întotdeauna proiecţia ergodică P_T cu imaginea $\mathcal{R}(P_T) = \mathcal{N}(I-T)$ şi cu nucleul $\mathcal{N}(P_T) = \overline{\mathcal{R}(I-T)}$. Astfel, în cazul mediilor Cesàro completăm rezultatul cunoscut al lui M. Lin [43] prin Teoremele 1.2.4 şi 1.2.5, iar Teorema 1.2.7 descrie chiar convergenţa uniformă a puterilor lui T, unde este evidenţiată condiţia spectrală $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$. De asemenea Teorema 1.2.11 arată că mediile $\{M_n^{(p)}(T)\}$ converg uniform simultan pentru $p \geq 1$, în prezenţa convergenţei la zero a şirului $\{\|T^n\|/n\}$.

Ergodicitatea Abel uniformă este descrisă în Teorema 1.3.4, care este analogul (simplificat) în context abelian, al rezultatului lui M. Lin. Insă o altă descriere importantă a ergodicităţii Abel uniforme este dată de Teorema 1.3.10, care arată că putem reduce comportamentul familiei $\{A_\theta(T)\}$ doar la un termen oarecare al său. In cazul operatorilor pozitivi pe latici Banach, convergeţele uniforme ale mediilor Cesàro şi Abel sunt simultane, prin Teorema 1.3.13. Un comportament ergodic similar îl au C_0-semigrupurile $\{T_t : t \geq 0\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$, rolul mediei Abel fiind preluat de $\{\lambda R_\lambda : \lambda > 0\}$, unde $\{R_\lambda\}$ este familia rezolventă asociată semigrupului (Teorema 1.4.5).

Ecuaţia Poisson $(I-T)x = y$ pentru $y \in \mathcal{X}$ este studiată în contextul general al operatorilor slab Cesàro ergodici. Teorema 1.5.2 şi Teorema 1.5.6 descriu cazurile când $y \in \mathcal{R}(I-T)$ şi respectiv, când $\mathcal{R}(I-T)$ este închis. Acestea conduc la caracterizări noi ale reflexivităţii în termenii mediilor Cesàro, obţinute în Teoremele 1.5.10 şi 1.5.12. Acestea completează caracterizările cunoscute din [31] care se referă doar la operatori cu puteri mărginite.

In fine, în acest capitol am inclus şi rezultatele privind saturaţia mediilor Cesàro de ordin superior $\{M_n^{(p)}(T)\}$, adică ordinul de mărginire (convergenţă) a lor. Rezultatele generalizează pe cele ale lui Butzer-Westphal [13, 14] referitoare la operatori cu puteri mărginite şi sunt menţionate în Teoremele 1.6.5 şi 1.6.6. Aici apar în mod natural şi extensii la medii Cesàro de ordin superior a unor rezultate ale lui Lin-Sine [45] privind operatorii Cesàro ergodici, extensiile fiind obţinute în Teoremele 1.6.2, 1.6.10 şi 1.6.12.

Capitolul 2 prezintă diferite condiţii de creştere a mediilor Cesàro sau Abel pe de o parte şi a funcţiei rezolvente pe de altă parte, precum şi interacţiunea dintre acestea. Unele condiţii se referă chiar la şiruri generale în $\kappa(T)$, oferind un spectru larg de aplicabilitate. Astfel, condiţiile de tip Allan-Ransford exprimă faptul că, dacă $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ atunci pentru orice $p \geq 1$ există un şir $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}_+$ cu $\frac{\alpha_n+1}{\alpha_n} \to 1$ şi $\|M_n^{(p)}(T)\| \leq \alpha_n$. Rezulatul important aici (Teorema 2.1.2) spune că o asemenea estimare combinată cu condiţia $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$ dă convergenţa $\|M_n^{(p-1)}(T)\|/n\alpha_n \to 0$. Aplicaţiile conduc la rezultate noi de convergenţă (Teoremele 2.1.7, 2.1.10, 2.2.3, 2.2.4), inclusiv de tip Katznelson-Tzafriri [35] pentru medii Cesàro (Teoremele 2.2.1, 2.2.2).

Pornind de la rezultatul cunoscut, că mărginirea Cesàro înseamnă mărginirea uniformă pe $(0, 1)$ a şirului sumelor parţiale ale funcţiei rezolvente [34], [51], în Teorema 2.3.1 am arătat că mărginirea oricărei medii Cesàro de ordin superior poate fi descrisă în termenii rezolventei şi a mediei cu un ordin inferior. Intr-un alt sens, mărginirea şirului $\{M_n^{(p)}(T)\}$ implică întotdeauna o creştere a funcţiei rezolvente prin Teorema 2.4.1 şi invers, dacă în plus funcţia de creştere a operatorului T în sensul [54, 55] este finită în 1, prin Teorema 2.4.4.

In acest capitol am prezentat, de asemenea, versiunea generalizată a teoremei lui O. Nevanlinna [56] în contextul şirurilor $\{T_n\} \subset \kappa(T)$, rezultatul fiind dat de Teorema 2.5.1. Acest fapt remarcabil permite ca, din anumite condiţii de creştere a rezolventei, să se obţină convergenţe uniforme ponderate ale puterilor lui T, când spectrul pe cercul unitate are măsura Lebesgue nulă. Alt rezultat important este Teorema 2.5.7, care arată că mărginirea uniformă periferică a tuturor mediilor Cesàro de ordin cel puţin 2 este simultană, adică echivalentă cu condiţia Kreiss a rezolventei.

Rămânând în contextul şirurilor în $\kappa(T)$ am descris o metodă generală de studiu a acestora, bazată pe intervertirea lui T cu un operator V pe un spaţiu cât a lui $\mathcal{X}$. Pentru a obţine V mai special (de exemplu izometrie) ca în Teorema 2.6.5, am introdus condiţia de regularitate (2.6.5), care se dovedeşte utilă în multe situaţii. Astfel, cu ajutorul ei se descrie complet convergenţa tare a lui $\{T_n\}$ când T este superciclic, cum arată Teorema 2.6.8, iar Teorema 2.6.10 dă o altă generalizare a rezultatului Ansari-Bourdon [5].

Capitolul 3 se referă în prima parte, la operatori ortogonali ergodici, care reprezintă "modelul" de similaritate a celor Cesàro ergodici, prin Teoremele 3.2.1 şi 3.2.5. Cazul operatorilor pentru care şirul $\{\|T_n x\|\}$ converge pentru orice $x \in \mathcal{H}$ este considerat (Teoremele 3.2.10 şi 3.2.11), care include ρ-contracţiile în sensul Sz.-Nagy-Foias. Aici ergodicitatea ortogonală poate si conectată cu proprietăţi asimptotice induse de limita slabă S_T a şirului $\{T^{*n}T^n\}$. Operatorii Toeplitz generalizaţi pentru T pot fi exprimaţi intrinsec prin S_T (Teoremele 3.3.1

şi 3.3.2), iar compacitatea lui S_T când T este ρ-contracţie este descrisă în Teorema 3.3.7, în versiunea lui R. G. Douglas [22].

In partea a doua prezentăm rezultate de tip ergodic pentru operatori cu puteri mărginite într-o seminormă pe $\mathcal{H}$ indusă de un operator pozitiv A. Aici folosim conceptul de $A^{1/2}$-adjunct introdus de [6, 7], prin care anumite proprietăţi ergodice de la operatori cu puteri mărginite din $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ pot fi transferate la cei menţionaţi mai sus, ca în Teoremele 3.4.5, 3.4.7 şi 3.4.10. Ca rezultat important arătăm că ergodicitatea ortogonală poate fi exprimată, în unele cazuri, prin Cesàro ergodicitate şi conceptul nou de A-ergodicitate introdus aici, ca în Teorema 3.4.11.

In cazul particular al A-contracţiilor, rezultatele menţionate (Teorema 3.5.3, Propoziţia 3.5.10) completează pe cele obţinute anterior în teza de doctorat. Interesant de semnalat este faptul că dacă T este polinomial mărginit în sensul Sz.-Nagy-Foias, atunci A-contracţiile (A-izometriile) se conservă prin funcţii interioare din H^∞ (Teorema 3.6.3). La fel se întâmplă cu A-ergodicitatea totală (adică invariantă la rotaţii), prin produse Blaschke neconstante (Teorema 3.6.7).

Capitolul 4 conţine rezultate de similaritate cu contracţii (izometrii parţiale) pentru operatori aparţinând anumitor clase de A-contracţii. Astfel, m-quasi-contracţiile şi quasi-ρ-contracţiile sunt similare cu contracţii (Teorema 4.1.10), iar Teoremele 4.1.1 şi 4.1.8 dau anumite descrieri ale m-quasi-contracţiilor (izometriilor). Alte descrieri în termenii transformatelor Duggal [30] şi Aluthge [3] sunt de asemenea menţionate (Teorema 4.2.2, Propoziţiile 4.2.5, 4.2.6). Un rezultat important este Teorema 4.3.1, care asigură similaritatea cu o izometrie parţială când restricţia la imaginea operatorului are această proprietate. Condiţii de similaritate cu izometrii parţiale quasinormale sunt menţionate în Teoremele 4.3.4, 4.5.1 şi 4.5.2. In ultimele două condiţiile sunt exprimate prin inverşi generalizaţi şi prin transformatele Duggal şi Aluthge. Alte cazuri de similaritate cu izometrii parţiale sunt prezentate prin Teoremele 4.5.4, 4.5.5 şi 4.5.8, in ultimul caz folosindu-se conceptul de dilatare generalizată inspirat din [25]. In Teoremele 4.4.1 şi 4.4.5 caracterizăm m-quasi-izometriile care sunt, respectiv au puterile izometrii parţiale (Corolarul 4.4.7). Proprietăţi privind spectrul punctual şi aproximativ pentru m-quasi-izometrii sunt cuprinse în Teoremele 4.4.11 şi 4.4.13.

Quasi-izometriile (cazul $m = 1$) sunt importante mai ales pentru aplicaţii, având o structură relativ simplă (izometrie pe imagine). Prin Teorema 4.6.1 şi Propoziţia 4.6.2 evidenţiem o parte quasi-izometrică reducătoare în contextul general al A-contracţiilor cu $\|A\| = 1$. In Teoremele 4.7.3 şi 4.7.6 ne referim la operatori A-izometrici pe imagine, sau mai general pe imaginea unei puteri a lor. Aceste noi clase de operatori au fost introduse în [75] şi sunt studiate în prezent şi de alţi autori (vezi [52], [67]). Alte proprietăţi spectrale interesante sunt oferite prin Teoremele 4.7.9 şi 4.7.12.

Capitolul 5 se referă doar la contracţii pe spaţii Hilbert. In prima parte reamintim fapte cunoscute referitoare la relaţia de dominare Harnack între contracţii. Acesta este un subiect complex de frontieră între teoria funcţiilor, a operatorilor, a măsurii şi analiza armonică, cu implicţii în teoria interpolării şi a geometriei hiperbolice (vezi [18], [60–62], [70, 71]). Astfel, prin Teorema 5.1.7 dăm o estimare a funcţiei rezolventă a unei contracţii T dominate Harnack de o alta T', estimarea obţinându-se pe imaginea $\mathcal{R}(T-T')$ în raport cu operatorul de defect $D_{T'} = (I - T'^*T')^{1/2}$. Aceasta este folositoare atât în aplicaţii, cât şi pentru determinarea elementelor maximale ale dominării Harnack, care sunt doar operatorii unitari singulari, prin Teorema 5.1.14. Alte proprietăţi ergodice şi asimptotice sunt menţionate în Teorema 5.2.2 şi Lema 5.2.9, respectiv. Folosind apoi transformata Hilbert ergodică am arătat prin Teorema 5.2.6 că spectrul punctual periferic se conservă prin dominare Harnack, la fel ca alte proprietăţi de clasificare a contracţiilor, menţionate în Teorema 5.2.12.

Dominarea Harnack generalizată între contracţii pe spaţii diferite este motivată de posibilitatea extensiei acestei relaţii de preordine la bicontracţii şi de investigarea unor teoreme de liftare a intervertitorilor pentru acestea. Astfel, în Teorema 5.3.3 caracterizăm dominarea Harnack generalizată, iar în Teorema 5.3.11 arătăm că această relaţie poate fi exprimată mai simplu în cazul când contracţiile au spectrul în discul deschis.

In partea a doua a capitolului descriem complet, prin reprezentări matriciale, părţile izometrice reducătoare, respectiv quasi-izometrice invariante /reducătoare, ale unei contracţii în Teorema 5.4.4, respectiv Teoremele 5.4.3 şi 5.4.6. In plus, dăm o caracterizare matricială a izometriilor parţiale, folosind subspaţiile de mai sus, în Teorema 5.4.7. O clasă specială de contracţii, anume TT^*-contracţiile, adică satisfăcând condiţia $(T^*T)^2 \leq TT^*$, este menţionată în final. Pentru acestea părţile unitare şi izometrice coincid cu $\mathcal{N}(I - S_T)$, iar partea quasi-izometrică reducătoare este $\mathcal{N}(I - S_T) \oplus \mathcal{N}(T^*)$, prin Teoremele 5.5.3 şi 5.5.10. In fine, condiţii de similaritate cu izometrii parţiale sunt menţionate în Teorema 5.5.16, iar proprietăţi spectrale sunt conţinute în Teorema 5.5.18.

Capitolul 6 prezintă rezultatele importante referitoare la dominarea Harnack a bicontracţiilor, adică pentru perechi de contracţii comutative $T = (T_0, T_1)$ pe $\mathcal{H}$. In Teorema 6.1.1 sunt cuprinse condiţii echivalente ale acestei relaţii exprimate în termenii dilatărilor Ando, a măsurilor semispectrale şi a lifturilor intervertitoare. Printre altele, acestea permit şi evidenţierea unor părţi Harnack particulare. Conservarea unicităţii unei dilatări speciale este arătată în Teorema 6.1.8, iar Teoremele 6.1.9 şi 6.1.14 arată că două tipuri de convergenţe privind calculul funcţional se transferă prin dominarea Harnack. Posibilitatea alegerii unor dilatări "distinctive" în sensul [19] conduce la o relaţie de dominare laterală (stânga/dreapta), exprimată prin condiţiile echivalente din Teorema 6.2.5, iar aceasta poate fi aplicată bicontracţiilor cu dilatări regulate, sau dublu comutative. Pentru acestea din urmă, în cazul că $\sigma(T_j) \subset \mathbb{D}$, $j = 0, 1$, se poate alege o măsură semispectrală F_T pe $\mathbb{T}^2$ cu valori în $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, care să fie absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue şi cu derivata Radon-Nikodym corespunzătoare o funcţie continuă şi pozitivă pe $\mathbb{T}^2$, prin Teoremele 6.3.3 şi 6.3.4. Mai mult, Teorema 6.4.1 arată că mulţimea Δ_{01} (şi similar Δ_{10}) dată prin

$$\Delta_{01} = \{T = (T_0, T_1) : T_0 T_1 = T_1 T_0,\ \|T_1\| < 1,\ T_0 \in \Delta\},$$

formează o parte Harnack de bicontracţii, dacă Δ este o parte Harnack de contracţii. In plus, există o familie $\{F_T\}$ de măsuri semispectrale echivalente Harnack între ele, pentru $T \in \Delta_{01}$. Dar pentru perechile dublu comutative, aplicaţia $T \to F_T$ este continuă relativ la topologiile induse de metricele hiperbolice corespunzătoare (Teorema 6.4.5). Acest rezultat reprezintă analogul necomutativ (operatorial) al teoremei de selecţie Bungart [12] din contextul părţilor Gleason ale algebrei bidisc.

In continuare Teoremele 6.4.6 şi 6.6.7 prezintă inegalităţi de tip Harnack şi Fan pentru bicontracţii stricte. De asemenea, versiuni de tip Fan ale inegalităţii von Neumann pentru bidisc sunt date în Teoremele 6.6.2, 6.6.4 şi 6.6.5, ultimele două constituind versiuni operatoriale ale principiului maximului modulului, respectiv a lemei Schwarz, pentru bidisc.

Alte inegalităţi de tip Fan pentru bicontracţii, obţinute prin factorizări ale funcţiilor din $H^\infty(\mathbb{D}^2)$ prin funcţii interioare în sensul lui W. Rudin [65], sunt menţionate în Teorema 6.7.1 şi corolarele aferente şi o altă versiune operatorială a principiului maximului modulului este conţinută în Teorema 6.7.9. In fine, inegalităţi de tip Borel-Carathéodory pentru contracţii şi bicontracţii stricte sunt date în Propoziţia 6.7.14 şi Teorema 6.7.17, respectiv. Toate aceste rezultate reflectă o conexiune intimă între funcţiile analitice pe bidiscul unitate şi bicontracţiile hilbertiene, în contextul teoriei dilatării.

Capitolul 7 se referă la limite asimptotice de bicontracţii. Acest concept a fost introdus recent în [40] şi [80]. Pe scurt, limita asimptotică S_T a bicontracţiei $T = (T_0, T_1)$ poate fi definită prin oricare din limitele iterate ale şirului dublu $\{T_0^m T_1^n\}$ $m, n \in \mathbb{N}$. Aceasta induce anumite subspaţii invariante pentru T, menţionate în Teorema 7.1.4. Cazul în care S_T comută cu o componentă a bicontracţiei T este descris în Teorema 7.2.1. Anumite proprietăţi referitoare la cazul $S_T = S_T^2$ (adică S_T proiecţie ortogonală) sunt menţionate în Teoremele 7.2.3 şi 7.2.11, respectiv Propoziţiile 7.2.4, 7.2.7 şi 7.2.12. Similaritatea prin S_T cu bi-izometrii apare în Teorema 7.3.1, iar aportul lui S_T în studiul operatorilor Toeplitz generalizaţi pentru bicontracţii este arătat prin Teorema 7.3.4.

Limita asimptotică permite exprimări mai simple pentru diferite subspaţii reducătoare care apar în descompunerile uzuale induse de bicontracţii în $\mathcal{H}$. Astfel, Teorema 7.4.1 se referă la partea unitară şi complet neunitară, iar Teoremele 7.4.3 şi 7.4.5 rafinează această descompunere în cazul când S_T este proiecţie ortogonală. Teorema 7.4.8 se referă la quasi-similaritatea cu bicontracţii unitare, în care caz Teorema 7.4.9 arată că, sau T_0 şi T_1 sunt operatori scalari unitari, sau T are subspaţii invariante netriviale, care sunt hiperinvariante pentru T_0 şi T_1. Alte concluzii privind subspaţiile invariante pentru bicontracţii sunt menţionate în Teoremele 7.4.9 şi 7.4.11. Acest studiu completează pe cel al lui Kosiek-Octavio [39] şi este pe direcţia lui Kubrusly [42] privind metoda de investigare.

Capitolul 8 include un plan de perspectivă privind cercetarea ştiinţifică şi cariera profesională a autorului. Astfel, voi continua cercetările în domeniile analizei complexe, funcţionale şi armonice, ale teoriei operatorilor şi măsurii şi ale sistemelor dinamice ergodice. Intenţionez de asemenea să scriu două monografii ştiinţifice, conţinând contribuţiile personale din lucrările publicate.

In Secţiunea 8.1 intitulată *Sisteme dinamice ergodice* sunt menţionate câteva probleme importante din contextul ergodic operatorial pe care îmi voi concentra atenţia. In special voi dezvolta ergodicitatea în spaţii semi-Hilbert, ca o tranziţie spre spaţii local convexe, unde anumite studii au apărut deja.

In Secţiunea 8.2 referitoare la *Probleme de similaritate* sunt menţionate proiecte pe care le am în vedere referitoare la probleme de similaritate. Astfel, voi continua proiectele cu C. Badea şi M. Mbekhta chiar la Universitatea din Lille în 2016, unde am obţinut o poziţie de cercetător invitat prin CNRS. Am în vedere perturbări de operatori similari cu cei ortogonal ergodici, sau reflectarea ergodicităţii Cesàro în contextul A-izometriilor.

In Secţiunea 8.3 intitulată *Relaţiile de preordine Harnack şi Shmul'yan pentru contracţii şi bicontracţii* se prezintă pe scurt problemele avute în vedere în perspectiva apropiată în acest context. Una din cele două monografii amintite mai sus, pe care am în vedere sa le realizez va trata această temă. Această lucrare va însuma toate rezultatele privind analiza Harnack a (bi, ρ-) contracţiilor, inclusiv referitoare la metricile Harnack şi hiperbolice corespunzătoare, dar în contextul sistemelor comutative.

Bibliografie

[1] A. Aleman and **L. Suciu**, *On ergodic operator means in Banach spaces*, arXiv:1511.08929v1 [math.FA], 28 Nov 2015, 1-29.

[2] G. R. Allan and T. J. Ransford, *Power-dominated elements in a Banach algebra,* Studia Math. 94 (1989), 63-79.

[3] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integral Equations Operator Theory 13 (1990), 307-315.

[4] T. Ando, I. Suciu and D. Timotin, *Characterization of some Harnack parts of contractions*, J. Operator Theory, 2 (1979), 233-245.

[5] S. I. Ansari and P. S. Bourdon, *Some properties of cyclic operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) 63 (1997), 195-207.

[6] M.L. Arias, G. Corach, M.C. Gonzalez, *Partial isometries in semi-Hilbertian spaces*, Linear Algebra and its Applications, 428 (2008), 1460-1475.

[7] M.L. Arias, G. Corach, M.C. Gonzalez, *Lifting properties in operator ranges*, Acta Sci. Math. (Szeged), 75, (2009), 635-653.

[8] C. Badea, M. Mbekhta, *Operators similar to partial isometries*, Acta Sci. Math. (Szeged), 71, (2005), 663-680.

[9] C. Badea, **L. Suciu** and D. Timotin, *Classes of contractions and Harnack domination*, arXiv:1505.01972v1 [math.FA], 8 May 2015, 1-18.

[10] F. Bayart and E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge University Press, 2009.

[11] H. Bercovici, R. G. Douglas and C. Foias, *Canonical models for bi-isometries*, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 218 (2012), Springer Basel AG, 177-205.

[12] L. Bungart, *Representing measures for algebras of holomorphic functions.* Function Algebras, Scott, Foresman and Co., 1965, 153-156.

[13] P. L. Butzer and U. Westphal, *The mean ergodic theorem and saturation*, Indiana Univ. Math. Journal, 20 (1971), 1163-1174.

[14] P. L. Butzer und U. Westphal, *Ein Operatorenkalkül für das approximationstheoretische Verhalten des Ergodensatzes im Mittel*, in Linear Operators and Approximation I (Proc. Conf. Oberwolfach 1971; P. L. Butzer, J. P. Kahane and B. Sz.-Nagy, Eds.) ISNM 20, Birkhäuser Verlag, Basel, 1972, 102-113.

[15] G. Cassier, *Autour de quelques interactions récentes entre l'analyse complexe et la théorie des opérateurs.* Operator Theory and Banach Algebras, Proceedings of the International Conference in Analysis Rabat (Morocco), April 12-14, 1999, Theta, Bucharest 2003.

[16] G. Cassier, *Generalized Toeplitz operators, restrictions to invariant subspaces and similarity problems*, J. Operator Theory, 53:1 (2005), 49-89.

[17] G. Cassier, **L. Suciu**, *Mapping theorems and similarity to contractions for classes of A-contractions.* Hot Topics in Operator Theory, Theta Series in Advanced Mathematics, 2008, 39-58.

[18] G. Cassier, N. Suciu *Mapping theorems and Harnack domination for ρ-contractions*, Indiana Univ. Math. J. 55 (2006), no. 2, 483–523.

[19] Z. Ceauşescu, I. Suciu, *Isometric dilations of commuting contractions I.* J. Operator Theory, 12 (1984), 65-88.

[20] L. W. Cohen, *On the Mean Ergodic Theorem*, Ann. of Math. Second Series, Vol. 41, No. 3, (1940), 505-509.

[21] G. Corach, A. Maestripieri, D. Stojanoff, *Oblique projections and Schur complements*, Acta Sci. Math. (Szeged), 67 (2001), 439-459.

[22] R.G. Douglas, *On the operator equation $S^*XT = X$ and related topics.* Acta. Sci. Math. (Szeged) 30 (1969), 19-32.

[23] N. Dungey, *Subordinated discrete semigroups of operators*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 363, 4, (2011), 1721-1741.

[24] W. F. Eberlein, *Abstract Ergodic Theorems and Weak Almost Periodic Functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949), 217-240.

[25] G. Eckstein, A. Racz, *On operator similar to contractions.* Preprint SLOHA, West University of Timişoara, (1978).

[26] J. Esterle, *Quasimultipliers, representations of H^∞, and the closed ideal problem for commutative Banach algebras*, Radical Banach Algebras and Automatic Continuity (Long Beach, Calif., 1981), Lecture Notes in Math. 975, Springer, Berlin - New York, 1983, 66-162.

[27] B. Farkas, T. Eisner, M. Haase, and R. Nagel, *Operator Theoretic Aspects of Ergodic Theory*, Springer, 2014.

[28] L. A. Fialkow, *Which operators are similar to partial isometries?* Proc. Amer. Math. Soc. 56, (1976), 140-144.

[29] C. Foias, *On Harnack parts of contractions*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 19 3 (1974), 315-318.

[30] C. Foias, Il Bong Jung, E. Ko, C. Pearcy, *Complete contractivity of maps associated with the Aluthge and Duggal transforms*, Pacific J. Math. 209 (2), (2003), 249-259.

[31] V. P. Fonf, M. Lin and P. Wojtaszczyk, *Poisson's equation and characterizations of reflexivity of Banach spaces*, Colloq. Math. 124 (2011), 225-235.

[32] I. Gelfand, *Zur Theorie der Charaktere der Abelschen topologischen Gruppen*, Mat. Sb. 9 (1941), 49-50.

[33] Jochen Glück, *On the peripheral spectrum of positive operators*, Positivity DOI 10.1007/s11117-015-0357-1, 2015, 1-30.

[34] J. J. Grobler and C. B. Huijsmans, *Doubly Abel bounded operators with single spectrum*, Questiones Mathematicae, 18 (1995), 397-406.

[35] Y. Katznelson and L. Tzafriri, *On power-bounded operators*, J. Funct. Anal. 68 (1986), 313-328.

[36] L. Kérchy, *Operators with regular norm-sequences*, Acta Sci. Math. (Szeged) 63 (1997), 571-605.

[37] L. Krchy, *Generalized Toeplitz operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) 68 (2002), 373-400.

[38] V. A. Khatskevich, Yu. L. Shmul'yan and V. S. Shul'man, *Preorder and equivalences in the operator sphere*, Sibirsk. Mat. Zh. 32 (3) (1991) (in Russian); English transl. : Siberian Math. J. 32 (3) (1991), 496-506.

[39] M. Kosiek and A. Octavio, *Wold-type extensions for N-tuples of commuting contractions*, Studia Math. 137 (1) (1999), 81-91.

[40] M. Kosiek and **L. Suciu** *Decompositions and asymptotic limit for bicontractions*, Annales Polonici Mathematici, 105.1 (2012), 43-64.

[41] U. Krengel, *Ergodic Theorems*, Walter de Gruyter Studies in Mathematics 6, Berlin - New York, 1985.

[42] C. S. Kubrusly, *An introduction to Models and Decompositions in Operator Theory*, Birkhäuser, Boston, 1997.

[43] M. Lin, *On the uniform ergodic theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 43 (1974), 337-340.

[44] M. Lin, D. Shoikhet and **L. Suciu**, *Remarks on uniform ergodic theorems*, Acta Sci Math. (Szeged), 81 (2015), 251-283.

[45] M. Lin and R. Sine, *Ergodic theory and the functional equation $(I-T)x=y$*, J. Operator Theory, 10 (1983), 153-166.

[46] M. Lin and **L. Suciu**, *Poisson's equation for mean ergodic operators*, Contemporary Mathematics, vol. 636, (2015), 141-148.

[47] W. Majdak, N. Secelean and **L. Suciu**, *Ergodic properties for operators in semi-Hilbertian spaces*, Linear and Multilinear Algebra, Volume 61, Issue 2, 2013, 139-159.

[48] M. Mbekhta and **L. Suciu**, *Classes of operators similar to partial isometries*, Integr. Equat. Oper. Th. vol. 63, Number 4, (2009), 571-590.

[49] M. Mbekhta and **L. Suciu**, *Generalized inverses and similarity to partial isometries*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 372, issue 2, (2010), 559-564.

[50] M. Mbekhta and **L. Suciu**, *Quasi-isometries associated to A-contractions*, Linear Algebra and its Applications, Vol. 459, (2014), 430-453.

[51] A. Montes-Rodríguez, J. Sánchez-Álvarez, and J. Zemánek, *Uniform Abel-Kreiss boundedness and the extremal behaviour of the Volterra operator*, Proc. London Math. Soc. 91 (2005), 761-788.

[52] M. S. Moslehian, S. M. S. Nabavi Sales, H. Najafi, *On the binary relation $\leq_u$ on self-adjoint Hilbert space operators*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 350 (2012), no. 7-8, 407-410.

[53] V. Müller, Y. Tomilov, *Quasisimilarity of power bounded operators and Blum-Hanson property*, J. Funct. Anal. 246, No. 2 (2007), 385-399.

[54] O. Nevanlinna, *Convergence of Iterations for Linear Equations*, Birkhäuser, (1993).

[55] O. Nevanlinna, *On the growth of the resolvent operators for power-bounded operators*, Banach Center Publ. 38, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa, 1997, 247-264.

[56] O. Nevanlinna, *Resolvent conditions and powers of operators*, Studia Math. 145 (2) (2001), 113-134.

[57] S. M. Patel, *A note on quasi-isometries*, Glasnik Matematicki, 35 (55) (2000), 307-312.

[58] S. M. Patel, *A note on quasi-isometries II*, Glasnik Matematicki, 38 (58) (2003), 111-120.

[59] P. Peticunot, *Intrinsic characterizations of some classes of operators similar to power partial isometries*, Acta Sci. Math. (Szeged) 74, (2008), 643-667.

[60] G. Popescu, *Hyperbolic Geometry on the Unit Ball of $\mathcal{B}(\mathcal{H})^n$ and Dilation Theory*, Indiana Univ. Math. J. 57, 6 (2008), 2891-2930.

[61] G. Popescu, *Noncommutative hyperbolic geometry on the unit ball of $B(H)^n$*, J. Funct. Anal. 256 (2009), no. 12, 4030-4070.

[62] G. Popescu, *Hyperbolic geometry on noncommutative balls*, Documenta Math. 14 (2009), 595-651.

[63] D. Popovici, *A Wold-type decomposition for commuting isometric pairs*, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 2303-2314.

[64] A. V. Romanov, *Weak convergence of operator means*, Izvestiya: Mathematics 75:6, 2011, 1165-1183.

[65] W. Rudin, *Function Theory in Polydiscs*, Benjamin, New York, 1969.

[66] M. Schreiber, *Uniform families of ergodic operator nets*, Semigroup Forum, Vol. 86, Issue 2, (2013), 321-336.

[67] O. A. M. Sid Ahmed and A. Saddi *A-m-Isometric operators in semi-Hilbertian spaces.* Linear Algebra and its Applications, Vol. 436, Issue 10, 3930-3942.

[68] I. Suciu, *Harnack inequalities for a functional calculus*, in : Hilbert Space Operators and Operator Algebra (Proc. Intern. Conf., Tihany, 1970), Colloq. Proc. Math. Soc. Janos Bolyai 5, North-Holland, Amsterdam, 1972, 499-511.

[69] I. Suciu, *Analytic relations between functional models for contractions*, Acta Sci Math. (Szeged) 33 (1973), 359–365.

[70] I. Suciu, *The Kobayashi Distance between two Contractions*, Operator Theory : Advances and Applications, Vol. 61, 1993, 189-200.

[71] I. Suciu, *Analytic formulas for the hyperbolic distance between two contractions*, Ann. Polon. Math. 66 (1997), 239-252.

[72] **L. Suciu**, *Some invariant subspaces for A-contractions and applications*, Extracta Mathematicae, 21 (3) (2006), 221-247.

[73] **L. Suciu**, *Maximum subspaces related to A-contractions and quasinormal operators*, J. Korean Math. Soc., 45 (2008), No. 1, 205-219.

[74] **L. Suciu**, *Maximum A-isometric part of an A-contraction and applications*, Israel Journal of Mathematics, vol. 174, (2009), 419-442.

[75] **L. Suciu**, *Quasi-isometries in semi-Hilbertian spaces*, Linear Algebra and its Applications, vol. 430, Issues 8-9, (2009), 2474-2487.

[76] **L. Suciu** and N. Suciu, *Harnack domination for contractions and related intertwining operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), 72 (2006), 319-343.

[77] **L. Suciu** and N. Suciu, *Harnack ordering for pairs of commuting contractions*, Proceedings of the 6th Congress of Romanian Mathematicians, Bucharest, (2007), vol. 1, 381-398.

[78] **L. Suciu** and N. Suciu, *Inequalities for strict bicontractions*, Annals of the University of Bucharest, LIX (2010), 3-15.

[79] **L. Suciu** and N. Suciu, *Selection of semi-spectral measures for bicontractions*, Theta Series in Advanced Mathematics, (2010), 1-21.

[80] **L. Suciu** and N. Suciu, *On the asymptotic limit of a bicontraction*, Theta Series in Advanced Mathematics, (2012), 117-135.

[81] **L. Suciu** and N. Suciu, *Borel-Carathéodory and Fan Type Inequalities for Hilbert space bicontractions*, Complex Analysis and Operator Theory, Vol. 8, Issue 1, (2014), 227-241.

[82] **L. Suciu** and J. Zemánek, *Growth conditions and Cesàro means of higher order*, Acta Sci Math. (Szeged), 79 (2013), 545-581.

[83] N. Suciu, *On Harnack domination of contractions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sr. Sci. Math. 27 (1979), 467-471.

[84] N. Suciu, *Absolutely continuous semispectral measures for pairs of commuting contractions*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 26, 4 (1981), 653-657.

[85] B. Sz.-Nagy, *On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space*. Acta Sci. Math. (Szeged), 11 (1947), 152-157.

[86] B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici, L. Kérchy, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space. Second edition. Revised and enlarged edition*, Springer, New York, 2010.

Departamentul de Matematică şi Informatică, Facultatea de Ştiinţe, Universitatea Lucian Blaga din Sibiu, Str. Dr. Ion Raţiu 5-7, Sibiu, 550012, Romania

E-mail address: laurians2002@yahoo.com