Probleme legate de curbură în geometria Riemann-Finsler globală rezumat

Ioan Radu Peter

1 Rezumatul tezei

În prezenta teza se prezinta rezultate care au ca şi element comun diferite tipuri de curburi pozitive pe varietăţi Riemann-Finsler.

Geometria Finsler işi are originea in calculul variaţional. Geometric, unei varietăţi diferenţiabile i se asociază, în fiecare spaţiu tangent, o normă Minkowski, care nu provine neapărat dintr-un produs scalar ca şi in cazul varietăţilor Riemann.

Prima parte a tezei **Different aspects of positive curvature in global Riemann-Finsler geometry**, conţine rezultate originale, in 4 din cele 5 capitole şi conţine rezultate legate de impactul diferitelor tipuri de curbură (flag-care este echivalentul curburii secţionale din geometria Riemann, k-Ricci si Ricci) asupra topologiei unei varietaţi în diferite forme.

In capitolul 1 sunt prezentate diferite prorietăţi ale metricilor Finsler folosite în capitolele următoare precum şi noţiuni folsite (conexiunea Cartan, variaţii ale lungimii arcului si energiei etc.).

Capitolul 2 conţine principii de conexitate pe varietăţi Finsler. Principiile de conexitate generalizeaza conexitatea simplă, caracterizată prin faptul că un spaţiu topologic simplu conex are primul grup de omotopie trivial ($\pi_1(M) = 0$). In cazul unei varităţi Finsler M am obţinut principii de conexitate utilizând esential Teoreme de Index Morse si in general teorie Morse precum si tehnici de topologie algebrica.

Varietăţile de curburi pozitive (sectională în caz Riemann, flag in caz Finsler, si extensiile lor$k$-Ricci) sunt departe de a fi înţelese. Mai ales în caz finsler rezultatele sunt puţine.

Principiile de conexitate sunt binecunoscute în geometria algebrică. Recent ele au fost dezvoltate in pentru varietăţi Riemann si Kähler ([FM05; FMR05]).

In articolele [Pet07] şi [Pet09] am dezvoltat aceste principii de conexitate in cazul varietăţilor Finsler de curbura flag şi k-Ricci pozitivă, pentru subvarietăţi scufundate cu index asimpotic mare.

În caz Finslerian problema devine mai complexă şi mai complicată decât in cazul Riemann.

Variaţia energiei aplicată unei geodezice cu capetele variabile (adică o geodezică care are capetele in două subvarietăţi) genereaza natural o a doua formă fundamentală ([Pet06]).

O subvarietate este total geodezică dacă geodezicele subvarietăţii sunt geodezice in varietatea ambientală. În caz Riemann aceasta este echivalentă cu anularea formei a doua a subvarietăţii.

In caz Finsler acest fapt nu mai este valabil, această a doua formă fundamentală care apare in variaţia a doua a energiei nu garantează faptul ca anularea ei este echivalentă cu proprietatea unei subvarietăţi de a fi total geodezice.

In această situaţie generală echivalenţa are loc doar in cazul subvarietătilor Berwald deoarece vectorul de referinţă in a doua formă fundamentală nu este tangent subvarietăţii.

Am definit indexul asimptotic al unei imersii folosind această a doua formă fundamentală, iar rezultatele au fost demonstrate in forma cea mai generală folosind acest index. Rezultate legate de varietăţi total geodezice au fost demonstrate pentru clasa varietăţiilor Berwald (in aceste spaţii indexul asimptotic este egal cu dimensiunea subvarietăţii dacă şi numai dacă subvarietatea este total geodezică.)

In cazul varietăţilor Riemann rezultate de acest tip sunt obţinute folosind indexul asimptotic, varietăttţi total geodezice (index asimptotic maxim) si curbură extrinsecă. In lucrare, folosind teorie Morse in context Finslerian, se demostrează rezultate folosind index asimptotic pentru metrici Finsler generale, rezultate legate de subvarietăţi total geodezice sunt demonstrate pentru metrici Berwald. Cazul subvarietăţilor de curbură extrinsecă pozitivă nu este abordat deoarece, chiar şi in cazul metricilor Berwald unde vectorul de referinţă al conexiunii folosite este irelevant, în produsele scalare care apar in curbura extrinsecă vectorul de referinţă este esenţial.

Capitolul 2, **Compactness in positively curved Finsler manifolds** prezintă rezultate de compactitate şi un rezultat de intersecţie.

Teorema Gauss-Bonnet este poate prima dintr-o serie de rezultate care exprima proprietăţi topologice ale unei varităţi din proprietăţi ale unor obiecte geometrice asociate lor.

Rezultate esenţiale in acest sens sunt teoreme de tip Hopf-Rinow, teoria câmpurilor Jacobi şi relaţia dintre comportarea geodezicelor si curbură, Teoremele Hadamard, Myers, Synge, teoreme de comparaţie tip Raych, teoreme de incdex Morse si aplicaţii ętc.

Cai mai întălniţi invarinţi sunt curbura secţională(flag in caz Finsler si scalară). Intre aceste două interpolează curbura notată Ric_k si numită $k-$Ricci

În această parte am considerat o varietate Finsler $n-$ dimensională, completă (M,F) , o subvarietate minimală P şi demonstrăm că dacă $\int_0^\infty Ric_k(t) > 0$ de-a lungul oricărei geodezice $\gamma : [0,\infty) \to M, t \to \gamma(t)$ care pleacă ortogonal din P sau $\int_{-\infty}^0 Ric_k(t) > 0$ de-a lungul oricărei geodezice $\gamma : (-\infty, 0] \to M, t \to \gamma(t)$ care ajunge ortogonal in P, atunci M este compactă. In caz riemannian exista numeroase rezulatate de acest tip (vezi [BT99] si rerinţele incluse). In caz Finsler acesta este se pare primul rezultat de acest tip, dar tehnicile folosite se pot adapta pentru obţinerea a numeroase rezultate.

In secţiunile următoare ale acestui capitol sunt prezentate două rezultate legate de curbura Ric_k care sunt diferite în natura lor, dar au esential demostraţii apropiate prin tehnica utilizatată. Primul rezultat da o condiţie suficintă pentru o medie a curburii k-Ricci să implice compactiatea varietăţii. Al doilea rezultat demonstrează că, intr-o varietate n-dimesională Finsler de curbură k-Ricci pozitivă, o subvarietate minimală si o subvarietate $n-1$ dimensională cu index asimptotic maxim se intersecteaza.

Fie (M,F) o varietate Finsler pozitiv (forward) completă, conexă de dimensiune n. Teorema Bonnet-Myers ([BCS00]) arată că, in cazul în care curbura Ricci Ric satisface inegalitatea $Ric \geq (n-1)a > 0$, atunci M si diametrul $d(M)$ este finit, mai mic sau egal cu $\dfrac{\pi}{\sqrt{a}}$. De aici nici o geodezică cu lungime mai mare decât $d(M)$ este minimală si deci conţine un cut point. Deci raza de injectivitate a lui M este finita.

In acest capitol demonstrăm că reciproc, faptul că raza de injectivitate este finită implică o marginire a infimului curburii Ricci.

$$\inf_{(x,y)\in SM} Ric_{(x,y)} \leq (n-1)\frac{\pi^2}{i(M)^2}.$$

Apoi in cazul curburii Ricci paralele (h-paralele) demonstrăm o marginire pentru curbura Ricci (în fapt pt suprem) [Pet16].

$$\sup_{(x,y)\in SM} Ric_{(x,y)} \leq (n-1)\frac{\pi^2}{i(M)^2}.$$

Ultimul capitol al primei parţi, **Weinstein's theorem for Finsler manifolds** conţine o teoremă de punct fix pentru izometrii ale spaţiilor Finsler ([KP06]). Principalul rezultat este:

Teoremă Weinstein's Theorem for Finsler manifolds: Fie f o izometrie a unei varietăţi Finsler M de dimensiune n. Dacă M are curbură flag pozitivă şi f păstrează orientarea lui M pentru n par şi schimbă orientarea lui M pentru n impar, f are un punct fix.

Ca şi consecinţă este prezentată teorema Synge in ambele cazuri (dimensiuni pare, respectiv impare). Demonstraţia primului caz diferă de cea din [Aus55; BCS00], iar a doua parte nu este acoperită in referinţele menţionate.

Partea II, **Hardy type inequalities in Minkowski spaces** conţine o inegalitate de tip Hardy pentru spatii Minkowski $(\mathbb{R}^n, F)$.

Există o intreaga literatură recentă legată de diferite forme ale inegalităţilor de tip Hardy, A.A. Balinsky, W.D. Evans, R.T. Lewis [BEL], N. Ghoussoub, A. Moradifam [GM13] şi referinţele. Aici putem găsi rezultate foarte recente legate de generalizări ale inegalităţilor de Tip Hardy cu singularităţi în interiorul sau pe frontiera unui domeniu si pentru operatori eliptici[GM13]. În [BEL12] sunt demonstrate inegalităţi Hardy folosind folosind distanţa unui punct din interiorul unui domeniu la frontieră.

In cele mai multe, superarmonicitatea funcţiei distanţă este esentială. De asemenea faptul că domeniul considerat este mediu convex (mean convex). În [LLL12] sunt demomnstrate inegalităţi Hardy pe un deomeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Rezultatul principal în acest capitol este:

Teoremă (Improved Hardy-Brezis-Marcus inequality for Minkowski spaces) Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este mediu convex si presupunem ca $H_0 := \inf_{x\in\partial\Omega} H(x) \geq 0$, atunci pentru orice $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega F^{\star 2}(Du)\mathsf{dm}(x) - \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\delta^2}\mathsf{dm}(x) \geq \lambda(n,\Omega)\int_\Omega u^2 \mathsf{dm}(x),$$

unde $\lambda(n,\Omega) := \inf_{x\in\Omega} \dfrac{-\boldsymbol{\Delta}\delta(x)}{2\delta(x)} \geq \dfrac{2}{n}H_0^2$.

Ca şi aplicaţie am considerat următoarea problema Cauchy.

Pentru $\mu \in \mathbb{R}$, pe spaţiul Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega, F, \mathsf{m})$ definim *operatorul singular Finsler Laplace*

$$\mathcal{L}_F^\mu u = -\boldsymbol{\Delta}(u) - \frac{1}{2}\frac{u}{\delta^2} - \mu u.$$

Considerăm problema Poisson singulară:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_F^\mu u = \kappa(x) & \text{in} \quad \Omega; \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este un domeniu mărginit.

Funcţionala de energie singulara $\mathscr{K}_\mu : W_0^{1,2}(\Omega, F, \mathsf{m}) \to \mathbb{R}$ ataşată operatorului singular Finsler-Laplace este:

$$\mathscr{K}_\mu(u) = \int_\Omega F^{*2}(x, Du(x))\mathrm{d}\mathsf{m}(x) - \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{u^2}{\delta^2}\mathrm{d}\mathsf{m}(x) - \mu\int_\Omega u^2\mathrm{d}\mathsf{m}(x). \tag{2}$$

Teorema de existentă şi unicitate este

Teoremă Fie F o metrică Minkowski pe $\mathbb{R}^n$. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu marginit deschis si $\kappa \in L^\infty(\Omega)$. Atunci problema (1) are o unică soluţie slaba pentru orice $0 \leq \mu < l_F\lambda(n, \Omega)$.

2 Continuarea muncii de cercetare. Perspective

Cercetarea in domeniul geometriei diferenţiale va continua, temele abordate fiind de actualitate şi importante in geometria globală.

O direcţie este studiul varietătilor cu diferite curburi pozitive. Cel mai important aspect este legat de studiul modului in care semnul curburilor se pastrează prin deformarea metricii via difeomorfisme speciale.

Se va continua studiul pricipiilor de conexitate pe varietăţi in cazul unor imersii speciale (de exemplu minimale). Se urmăreşte in mod special extinderea în cazul varităţilor Finsler complexe.

Criteriile de compactitate vor fi continuate urmărindu-se obtinerea unor condiţii cât mai slabe asupra diferitelor tipuri de curbură.

O primă direcţie in inegalităţile de tip Hardy-Brezis va fi studiul celei mai bune constante, de importanţă mare in acest domeniu. Se va urmări extinderea in cazul varietăţilor Finsler si obtierea unor alte inegalităţi de care sa conţină informaţii geometrice legate de diferite tipuri de curburi, atât în caz Riemann cât şi Finsler.

O altă direcţie de cercetare este legată de articolele [MPP15], [MPP16]. În acest sens vom incerca sa obtinem rezultate legate de diferite tipuri de convexităţi in spaţii infinit dimensionale.

Pe lângă domeniul prezentat in teză activitatea de cercetare a cuprins şi o parte importantă de aplicaţii ale matematicii (vezi lista de lucrări).

În ultimii ani am participat la mai multe proiecte interne si internaţionale ca si membru in echipa (în CV este lista ultimilor ani), fiind responsabil cu partea matematică. Acest fapt demonstreaza disponibilitatea de a lucra in echipă si capacitatea de a conduce/propune teme actuale. Menţionez ca am fost referent ştiintific de lucrari de diploma si am articole scrise in colaborare cu studenţi de la master si doctorat de la Facultatea de Automatică şi Calculatoare.

Astfel se urmăreşte continuarea colaborării cu colegii de la Departamentul de calculatoare în diferite direcţii(viziune computerizată, neuroştiinţe etc.) precum şi iniţierea unor colaborări noi, în mod special aplicaţii medicale. Se poate remarca că numeroase lucrări publicate în aceste direcţii au citări in reviste importante şi la conferinţe majore ([DPN10], [NPM11], [NPM12], [NNP14][NNP15]

In ultimii 5-6 ani a existat o colaborare constantă cu cerecet atori de la Memorial Sloan Kettering Cancer Center. Din această colaborare au rezultat lucrări in reviste importante, intre ele si Nature,([Rod+16], [Jha+14]) şi participări la conferinţe majore in domeniu. Această colaborare are un puternic caracter interdisciplinar (în grup sunt chimişti, biologi, medici, informaticieni, matematicieni). Colaborarea conitinuă, matematica jucând un rol important in cercetările in cancer (vezi de exemplu grupurile de matematică oncologică de la Harvard, MIT, Viena şi alte centre majore). Se va încerca constituirea unui asemenea grup, de matematica, metodele de inteligenţă artificială, recunoaştere automată(pattern recognition) şi învaţare automată (machine learning) acestea fiind metode esenţiale de cercetare în domeniu.

References

[Aus55] L. Auslander. "On curvature in Finsler Geometry". In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 79 (1955), pp. 378–388.

[BCS00] D. Bao, S.-S. Chern, and Z. Shen. *An introduction to Riemann-Finsler geometry.* Graduate Texts in Mathematics. 200. New York, NY: Springer., 2000.

[BEL] A.A. Balinsky, Evans, and R.T. Lewis. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality.*

[BEL12] A. Balinsky, W.D. Evans, and R.T. Lewis. "Hardy's inequality and curvature". In: *Journal of Functional Analysis* 262.2 (2012), pp. 648–666.

[BT99] Tran Quoc Binh and Lajos Tamássy. "Galloway's compactness theorem on Sasakian manifolds". In: *Aequationes Math.* 58.1-2 (1999). Dedicated to János Aczél on the occasion of his 75th birthday, pp. 118–124. ISSN: 0001-9054.

[DPN10] M. Drulea, I.R. Peter, and S. Nedevschi. "Optical flow a combined local-global approach using L1 norm". In: 2010, pp. 217–222. ISBN: 9781424482306. DOI: `10.1109/ICCP.2010.5606437`.

[FM05] Fuquan Fang and Sérgio Mendonça. "Complex immersions in Kähler manifolds of positive holomorphic k-Ricci curvature." In: *Trans. Am. Math. Soc.* 357.9 (2005), pp. 3725–3738.

[FMR05] Fuquan Fang, Sérgio Mendonça, and Xiaochun Rong. "A Connectedness principle in the geometry of positive curvature." In: *Communications in Analysis and Geometry* 13.4 (2005), pp. 671–695.

[GM13] N. Ghoussoub and A. Moradifam. *Functional inequalies: New Perspectives and Applications.* 2013.

[Jha+14] K. Jhaveri et al. “Heat shock protein 90 inhibitors in the treatment of cancer: Current status and future directions”. In: *Expert Opinion on Investigational Drugs* 23.5 (2014), pp. 611–628. ISSN: 13543784. DOI: 10.1517/13543784.2014.902442.

[KP06] L. Kozma and I.R. Peter. “Weinstein’s theorem for Finsler manifolds”. In: *Kyoto Journal of Mathematics* 46.2 (2006), pp. 377–382. ISSN: 0023608X.

[LLL12] R. T. Lewis, J. Li, and Y. Li. “A geometric characterization of a sharp Hardy inequality”. In: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 262 (2012), pp. 3159–3185.

[MPP15] Daniela Marian, Ioan Radu Peter, and Cornel Pintea. “A class of generalized monotone operators”. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 421.2 (2015), pp. 1827–1843. ISSN: 0022-247X. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.08.017.

[MPP16] Daniela Marian, Ioan Radu Peter, and Cornel Pintea. “Operations with monotone operators and the monotonicity of the resulting operators”. In: *Monatshefte für Mathematik* 181.1 (2016), pp. 143–168. ISSN: 1436-5081. DOI: 10.1007/s00605-015-0820-x.

[NNP14] M. Negru, S. Nedevschi, and R.I. Peter. “Exponential image enhancement in daytime fog conditions”. In: 2014, pp. 1675–1681. ISBN: 9781479960781. DOI: 10.1109/ITSC.2014.6957934.

[NNP15] M. Negru, S. Nedevschi, and R.I. Peter. “Exponential Contrast Restoration in Fog Conditions for Driving Assistance”. In: *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 16.4 (2015), pp. 2257–2268. ISSN: 15249050. DOI: 10.1109/TITS.2015.2405013.

[NPM11] S. Nedevschi, I.R. Peter, and A. Mandrut. “Performance prediction using kernel canonical correlation analysis”. In: 2011, pp. 157–162. ISBN: 9781457714788. DOI: 10.1109/ICCP.2011.6047862.

[NPM12] S. Nedevschi, I.R. Peter, and A. Mandrut. “PCA type algorithm applied in face recognition”. In: 2012, pp. 167–171. ISBN: 9781467329514. DOI: 10.1109/ICCP.2012.6356181.

[Pet06] I. R. Peter. “On the Morse Index Theorem where the ends are submanifolds in Finsler geometry.” In: *Houston J. Math.* 32.4 (2006), pp. 994–1010.

[Pet07] I. R. Peter. “A connectedness principle in positively curved Finsler manifolds.” In: *Finsler Geometry, Sapporo 2005-In Memory of Makoto Matsumoto.* Advances Studies in Pure Mathematics. Mathematical Society of Japan. 2007.

[Pet09] I. R. Peter. “Some connectedness problems in positively curved Finsler manifolds”. In: *J. Geom. Phys.* 59.1 (2009), pp. 54–62.

[Pet16] Ioan Radu Peter. “A bound for the Finslerian Ricci scalar”. In: *submitted* (2016).

[Rod+16] A. Rodina et al. “The epichaperome is an integrated chaperome network that facilitates tumour survival”. In: *Nature* 538.7625 (2016), pp. 397–401. ISSN: 00280836. DOI: 10.1038/nature19807.