TEME DE ANALIZĂ VARIAŢIONALĂ PRIN MONOTONIE ŞI CONVEXITATE

Rezumat

Această teză este construită pe o serie de rezultate semnificative obţinute de autor dupa conferirea titlului de doctor în matematică la Universitatea Babeş-Bolyai în anul 2011. Lucrarea conţine patru capitole compuse din 12 secţiuni grupate tematic. Fiecare secţiune se bazează pe câte o lucrare publicată a autorului putând fi citită independent de secţiunile anterioare. Din punct de vedere tematic, tratăm unele dintre cele mai importante probleme ale analizei variaţionale, cum ar fi: problemele de optimizare, inegalităţile variaţionale, problemele de echilibru sau problemele minimax. Iar rezultatele noastre se bazează pe două concepte fundamentale ale analizei variaţionale, şi anume pe noţiunea de monotonie şi generalizările sale, respectiv pe noţiunea de convexitate şi extensiile sale.

Amintim că noţiunea de monotonie pentru operatori definiţi pe un spaţiu Banach şi cu valori în dualul acestuia a fost introdusă în urmă cu aproximativ o jumătate de secol în celebrele lucrări ale lui Browder şi Minty. Această noţiune s-a dovedit a fi o piatră de temelie pentru dezvoltarea analizei variaţionale, datorită faptului că convexitatea unei funcţii proprii, inferior semicontinuă poate fi caracterizată prin maximal monotonia subdiferenţialei sale.

Pe parcursul ultimelor decenii, conceptul de monotonie clasică s-a impus datorită importanţei sale, şi a influenţat şi alte ramuri ale matematicii şi ale ştiinţei în general, cum ar fi: ecuaţiile diferenţiale, teoria probabilităţilor, procesarea imaginilor, economia teoretică, ingineria, managementul precum şi alte ştiinţe aplicate. Datorită acestor interacţiuni, noţiunea de monotonie alături de cea de convexitate au fost supuse unei evoluţii dinamice reflectate într-o serie de noi concepte ce extind noţiunile clasice, fără pierderea unor proprietăţi valoroase.

De-a lungul acestei lucrări, folosim conceptele de monotonie şi convexitate cu scopul de a obţine rezultate de injectivitate globală, apoi pentru a demonstra existenţa soluţiilor pentru inegalităţi variaţionale şi probleme de echilibru atât scalar cât şi vectorial. Tot prin utilizarea acestor concepte, obţinem şi rezultate de minimax pe mulţimi dense, pentru ca prin intermediul sistemelor dinamice discrete si continue asociate, să reuşim aproximarea minimului unei funcţii obiectiv cu structură complexă.

Capitolul 1 tratează monotonii locale (generalizate) şi convexităţi locale (generalizate) pe mulţimi dense speciale, împreunş cu câteva rezultate de injectivitate.

În prima secţiune continuam stuiul început în G. Kassay, C. Pintea, S. László, *Monotone operators and closed countable sets*, Optimization **60**, 1059-1069 (2011), îmbunătăţind rezultatele obţinute acolo. Mai exact, am reuşit să demonstrăm că monotonia locală, doar pe submulţimi reziduale ale mulţimii de bază, a unui operator univoc este suficientă pentru a garanta monotonia globală a operatorului respectiv şi convexitatea imaginilor inverse. Ca urmare, se poate deduce că monotonia locală pe submulţimi reziduale ale omeomorfismelor locale asigură injectivitate lor globală. Acordăm o atenţie deosebită unor mulţimi reziduale rezultate ca complemente de mulţim σ-afine, σ-compacte şi σ-varietăţi algebrice. De asemenea, arătăm că rezultatele obţinute nu pot fi extinse la operatori monotoni multivoci.

În cazul monotoniilor generalizate însă, rezultate mult mai profunde decât cele din lucrarea iniţială S. László, *Generalized monotone operators, generalized convex functions and closed countable sets*, J. Convex Anal. **18**, 1075-1091 (2011), pot fi obţinute chiar şi în cazul multivoc. Într-adevăr, în a doua secţiune arătăm că monotonia locală (generalizată) a unui operator multivoc, inferior semicontinuu pe un anumit tip special de mulţime densă asigură monotonia globală generalizată a acestui operator. Încheiem această secţiune cu rezultate privind convexitatea generalizată globală a unei funcţii reale, care este obţinută prin convexitatea locală corespunzătoare pe o mulţime densă. În ultima secţiune a primului capitol obţinem condiţii suficiente care asigură convexitatea preimaginilor ale unui operator monoton într-un anumit sens. Mai mult, sunt obţinute condiţii care să asigure monotonia şi injectivitatea locală ale unui operator. Combinând condiţiile care asigură injectivitatea locală şi convexitatea preimaginilor unui operator, suntem în situaţia de a obţine rezultate de injectivitate globală. Ca şi cazuri particulare obţinem câteva condiţii analitice ce asigură injectivitatea, respectiv univalenţa ale unei funcţii complexe de o variabilă complexă. Totodată, arătăm că rezultate clasice cum ar fi Teorema lui Alexander-Noshiro-Warschawski şi Wolff sau Teorema lui Mocanu sunt cazuri particulare ale rezultatelor noastre.

În Capitolul 2 studiem problema minimizării sumei a două funcţii, atât în cadrul convex cât şi cel neconvex.

În prima secţiune propunem un algoritm de tip proximal cu efecte inerţiale/memorie pentru minimizarea sumei dintre o funcţie nenetedă şi una diferenţiabilă într-un cadru neconvex. Fiecare şir de iterate generate de algoritm converge la un punct critic al funcţiei obiectiv cu condiţia ca o regularizare corespunzătoare a obiectivului satisface inegalitatea Kurdyka-Łojasiewicz, care este, de exemplu, îndeplinită pentru funcţiile semi-algebrice. Ilustrăm rezultatele teoretice prin considerarea a doua experimente numerice: primul se referă la capacitatea de recuperare soluţiilor optime locale ale problemelor de optimizare neconvexă, în timp ce al doilea se referă la restaurarea unei imagini neclare. Apoi, în a doua secţiune, considerăm un sistem dinamic de ordinul doi de forma $\ddot{x}(t)+\gamma(t)\dot{x}(t)+x(t)-J_{\lambda(t)A}(x(t)-\lambda(t)D(x(t))-\lambda(t)\beta(t)B(x(t)))=0$, unde $A:\mathcal{H}\rightrightarrows\mathcal{H}$ este un operator maximal monoton, $J_{\lambda(t)A}:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ este operatorul rezolvent al operatorului $\lambda(t)A$, $D,B:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ sunt operatori cocoercivi definiţi pe un spaţiu Hilbert real $\mathcal{H}$, $\lambda,\beta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ sunt funcţii de relaxare şi $\gamma:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ este o funcţie de amortizare, toate dipinzând de timp. Arătăm existenţa şi unicitatea soluţiilor în cadrul Teoremei Cauchy- Lipschitz-Picard şi demonstrăm convergenţa asimptotică ergodică ale traiectoriilor generate la zerourile operatorului $A+D+N_C$, unde $C=\text{zer}(B)$ şi N_C este operatorul de con normal, folosind analiza Lyapunov combinata cu celebra Lema Opial în versiunea sa ergodică continuă. Mai mult, aratăm convergenţa tare a traiectoriilor la unicul zero al operatorului $A+D+N_C$ în cazul când A este un operator tare monoton. Acest cadr padmite ca şi caz particular minimizarea sumei unei funcţii convexe nenetede cu una convexă netedă şi, regăsind şi îmbunătăţind astfel mai multe rezultate cunoscute din literatura de specialitate.

Capitolul 3 tratează existenţa soluţilor unor inegalităţi variaţionale. Tratăm atât cazurile în care operatorul implicat este univoc cât şi cazul multivoc. Aplicăm aceste rezultate cu scopul de a obţine rezultate noi de puncte de coincidenţă pentru doi operatori şi noi rezultate de punct fix.

În prima secţiune introducem un nou tip de operatori care generalizează noţiunea de operator de tip QL (o extensie a funcţiilor quasiliniare şi a operatorilor afini), care poate fi deci văzut ca o extensie a proprietăţii de monotonie a funcţiilor reale de o variabilă reală. În continuare dăm câteva condiţii suficiente care asigură existenţa soluţiilor pentru o inegalitate variaţională generală extinsă. Arătăm, de asemenea, că aceste rezultate nu au loc în afara clasei operatorilor introduse în această secţiune. În cele din urmă, ca aplicaţie, pe baza rezultatelor de existenţa a soluţiilor pentru inegalităţile variationale generale stabilite înainte, obţinem un rezultat de punct de coincidenţă în spaţii Hilbert. Deşi rezultatele de existenţa a soluţiei pentru inegalităţile variationale clasice de tip Stampacchia au fost abundente în ultimii ani, acest lucru nu se întâmplă şi în cazul inegalităţilor variaţionale generale, respectiv inegalităţilor variaţionale multivoce. A doua şi a treia secţiune a acestui capitol sunt puternic conectate. În a doua secţiune obţinem mai multe rezultate de existenţă a soluţiei pentru inegalităţile variationale generale de tip Stampacchia. Aceste rezultate vor fi utilizate pentru obţinerea unor rezultate necunoscute de punct de coincidenţă în spaţii Hilbert. Tot aici, ca şi corolare, se obţin mai multe teoreme de punct fix. În secţiunea a treia obţinem unele rezultate de existenţa a soluţiei pentru inegalităţi variaţionale generale, fără a presupune că operatorii implicaţi sunt de tip QL. Nu asumăm nici o proprietate de continuitate a operatorilor implicaţi, lucrăm cu anumite condiţii secvenţiale impuse acestor operatori. Folosim aceste rezultate pentru a obţine rezultate noi de puncte de coincidenţă în spaţii Hilbert. A patra secţiune tratează inegalităţi variaţionale multivoce atât de tip Stampachia cât şi de tip Minty. Demonstrăm o extindere utilă a principiului KKM în spaţii Banach. Apoi obţinem nişte rezultate în ceea ce priveşte existenţa soluţiilor pentru aceste inegalităţi variaţionale multivoce. Prin exemple arătăm că rezultatele noastre sunt cele mai bune posibile într-un anumit sens, adică, dacă renunţăm la presupunerea că unul dintre operatorii implicaţi este de tip QL, în ipotezele principalelor teoreme, atunci concluzia lor nu mai rămâne validă. În final, ca aplicaţii ale rezultatelor obţinute, obţinem rezultate de punct de coincidenţă în spaţii Hilbert.

Capitolul 4 tratează probleme de echilibru scalar şi vectorial pe mulţimi dense. Mai mult, sunt obţinute rezultate noi de minimax pe mulţimi dense.

În prima secţiune, tratăm probleme de echilibru multivoc, pentru care obţinem condiţii suficiente pentru existenţa soluţiei. Condiţiile pe care le considerăm sunt impuse nu asupra întregului domeniu, ci pe o submulţime densă. Ca aplicaţie, obţinem o teoremă de tip Debreu-Gale-Nikaïdo cu o lege Walras considerabil slăbită în ipoteza sa. Mai mult decât atât, considerăm şi un joc necooperativ de n persoane şi arătăm existenţa echilibrului Nash pe baza unor ipoteze mai puţin restrictive decât cele clasice. Apoi, în secţiunea a doua, obţinem condiţii suficiente, care să asigure existenţa soluţiei unor probleme vectoriale de echilibru în spaţii vectoriale Hausdorff topologice, ordonate de un con. Tot aici, condiţiile, pe care le considerăm, nu sunt impuse pe întregul domeniu al operatorilor implicaţi, ci pe o submulţime densă. Aplicăm rezultatele obţinute în optimizare vectorială şi inegalităţi variaţionale vectoriale. În ultima secţiune obţinem condiţii care asigură ca infimumul unei funcţii proprii, semicontinuă inferior şi convexă pe o submulţime densă a domeniului său coincide cu infimumul global a acestei funcţii. Mai mult obţinem condiţii care asigură coincidenţa a două funcţii convexe, care sunt egale pe o submulţime densă a domeniului lor comun. Apoi, aplicăm aceste rezultate, în vederea obţinerii unor rezultate de minimax pe mulţimi dense. Tot aici, printr-un exemplu aratăm că extinderea rezultatelor de minimax a lui Fan şi a lui Sion pe mulţimi dense este imposibilă. În cele din urmă, pe baza rezultatelor de minimax, obţinem condiţii care asigură densitatea mai multor familii de funcţionale în spaţiile de funcţii $C(K)$ şi $B(K)$. Aceast cadru ne permite să obţinem o demonstraţie alternativă a celebrul rezultat de reflexivitate al lui James.